Calcul vectoriel en dimension 2 et 3

11 février 2014

1 Repérage d'un point

Dans le plan, on peut repérer un point :

- en coordonnées cartésiennes : (x, y) ; souvent, $x = x(t), y = y(t)$, t étant le temps ;

- en coordonnées polaires : (r, θ) ; lien entre les différentes coordonnées : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

Lorsque x, y, z dépendent d'un paramètre t , ces variables sont liées : on peut, par exemple, trouver une relation entre x, y et z : c'est l'équation cartésienne de la trajectoire du point ; il y a d'autres manières de décrire une courbe.

Par exemple : si $M(x,y)$ est tel que : $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$, t appartenant à $\mathbb{R}$; la trajectoire de M est le cercle de centre O et de rayon 2 ; si t appartient à $[0; \pi]$, la trajectoire de M est le demi cercle de centre O et de rayon 2 ; une autre façon de décrire la courbe est :

L'ensemble des points $M(r, \theta)$, ($\theta \in [0; 2\pi]$ où $\theta \in [0; \pi]$) et $r = 2$.

Dans l'espace :

- en coordonnées cartésiennes : (x, y, z) , $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

- en coordonnées cylindriques : (r, θ, z) ; lien entre les différentes coordonnées : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta, z = z$.

- en coordonnées sphériques : (r, θ, φ) ; lien entre les différentes coordonnées :

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

Latitude : $\pi/2 - \varphi$

Longitude : θ

Exemple : Paris : Latitude : $\varphi = 48^\circ 50' 11.2''$; Longitude : $\theta = 2^\circ 20' 13.8''$

Moscou : Latitude : $\varphi = 55^\circ 45' 39.4''$; Longitude : $\theta = 37^\circ 39' 53.1''$

Distance d entre Paris et Moscou ?

Le rayon de la Terre est de 6371km

Voir site Lexilogos.com : $d = 2491$ km

Il est utile de passer des coordonnées cartésiennes à d'autres coordonnées dans beaucoup de problèmes où les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées.

Rappels sur le produit scalaire ; expression

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

c'est ainsi que l'on définit l'angle entre 0 et π de deux vecteurs.

Prérequis :

On connaît l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée ; orientation du plan par une base orthonormée ;

2 Produit vectoriel, orientation

Rappel : on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de sa structure euclidienne canonique définie par le produit scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{i=1}^3 y_i e_i \right) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i,$$

la norme associée étant notée $\|x\|$.

On note souvent le produit scalaire par $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$

Donnons la définition du produit vectoriel dans la base $\mathcal{B}$:

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, a, b, c, d étant des réels, est, par définition, le réel $ad - bc$.

Définition 2.1

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | e_i \rangle e_i = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

proposition 2.1 On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

et :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

Définition 2.2 Déterminant (ou produit mixte) de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $\mathcal{B}$: c'est par définition le scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

On en déduit en particulier :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \det(\vec{u}, \vec{v}, e_i) e_i$$

2.1 Orientation, bases directes

L'orientation du plan par une base directe $(\vec{u}, \vec{v})$ permet d'orienter l'espace :

On a vu que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base de E .

Par définition, la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe

proposition 2.2 *Le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle on le calcule.*

proposition 2.3 *Pour toute base orthonormée directe :*

$$e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_1 \wedge e_3 = -e_2, \quad e_1 \wedge e_2 = e_3.$$

proposition 2.4 *Pour toute base orthonormée directe : $\text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$; pour toute base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) indirecte : $\text{Det}(e'_1, e'_2, e'_3) = -1$;*

Théorème 2.1 1. *Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires dans E si et seulement $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.*

2. *Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ appartient à la droite orthogonale au plan engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ et le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base de E .*

3. *Pour $\vec{u}, \vec{v}$ dans E on a :*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2.$$

En particulier, on a $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

4. *Pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans E on a :*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \vec{w}$$

(le produit vectoriel n'est pas associatif).

5. *Si x est un vecteur non nul dans E pour tout vecteur $y \in E$ orthogonal à x il existe un vecteur $\vec{w} \in E$ tel $x \wedge \vec{w} = y$.*

Preuve 2.1 1. *Si $(\vec{u}, \vec{v})$ sont colinéaires, alors pour $i = 1, 2, 3$ $\det(\vec{u}, \vec{v}, e_i) = 0$ ce qui équivaut à $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.*

On peut facilement vérifier la formule avec les coordonnées du produit vectoriel.

2. *Avec $\langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{u} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$, on déduit que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Avec l'antisymétrie du produit vectoriel on déduit que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est également orthogonal à $\vec{v}$. Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires, ils engendrent alors un plan orthogonal à la droite engendré par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base de E .*

3. *A l'aide des coordonnées on déduit que :*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2.$$

4. *On retiendra :*

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2$$

2.2 Applications du produit vectoriel :

1. Equation cartésienne d'un plan P dans une base orthonormée : le plan étant défini par $(A, \vec{u}, \vec{v})$: alors le plan P est l'ensemble $\{M, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0\}$
2. Distance d'un point M à une droite $D(A, \vec{u})$: c'est : $d(M, D) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$
3. Aire d'un parallélogramme ABCD : c'est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \left| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$
4. Volume d'un parallélépipède : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: c'est : $\left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$
5. En mécanique : la notion de moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point O : c'est $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$
6. En mécanique : le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ rotation instantané est défini par $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, où $\overrightarrow{V}(M)$ est le champ des vitesses

3 Exemples et exercices

Exercice 3.1 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, écrire une équation cartésienne du plan passant par $A(1; -2, 1)$, dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 4, -2)$ et $\vec{v}(-1, 1, 3)$; calculer l'aire du parallélogramme ABDC, où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; calculer le volume du parallélépipède défini par (O, A, B, D, C) .

Une équation cartésienne du plan P passant par $A(1; -2, 1)$, dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 4, -2)$ et $\vec{v}(-1, 1, 3)$ est obtenue en écrivant qu'un point M appartient à P si et seulement si : $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

On obtient : $\vec{u} \wedge \vec{v}(14, -1, 5)$

Puis : $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 14(x-1) - (y+2) + 5(z-1) = 0$

Donc une équation cartésienne du plan P est : $14x - y + 5z = 21$

l'aire du parallélogramme ABDC est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{14^2 + 1 + 5^2} = \sqrt{222}$

Volume du parallélépipède défini par (O, A, B, D, C) : c'est : $\left| \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

21

Exercice 3.2 Dans l'espace euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(-2, 2, k)$ k étant un réel et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$: à quelle condition a-t-on $\vec{w} \neq \vec{0}$? à quelles conditions sur λ, μ, ν le système $(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}, \nu \vec{w})$ est-elle une base orthonormée ?

On obtient : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}(-4-k, -4-k, 0)$

Donc $\vec{w} \neq \vec{0}$ si et seulement si $k \neq -4$

le système $(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}, \nu \vec{w})$ est une base orthonormée si :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$:

Soit $k = 2$

Et si :

$$\lambda = \frac{1}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \mu = \frac{1}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{8+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{12}}; \nu = \frac{1}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2(4+k)^2}} = \frac{1}{\sqrt{72}}$$

bases directes : $b_1 = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_2 = (\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}), b_3 = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}), b_4 = (-\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_5 = (\vec{i}, -\vec{k}, \vec{j})$

Exercice 3.3 L'espace étant muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dire parmi ces bases celles qui sont directes : $b_1 = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_2 = (\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}), b_3 = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}), b_4 = (-\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_5 = (\vec{i}, -\vec{k}, \vec{j})$

$$b_1 = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_2 = (\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}), b_3 = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}), b_4 = (-\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}), b_5 = (\vec{i}, -\vec{k}, \vec{j})$$

En appliquant les règles vues en cours, on a :

Les bases directes sont : $b_1; b_5$

Les bases indirectes sont : $b_2; b_3; b_4$

4 Droite vectorielle et plan vectoriel de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

En géométrie vectorielle, les ensembles sont constitués de vecteurs, alors qu'en géométrie affine, ils sont constitués de points ; on peut décrire une droite affine ou un plan affine par :

- Une (ou plusieurs) équation) cartésienne
- Une représentation paramétrée

Définition 4.1 Dans $\mathbb{R}^3$, tout triplet de vecteurs non coplanaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'appelle une base ; CNS : $\text{Det}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non nul.

Définition 4.2 Une droite vectorielle D est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul. On dit que la dimension de D est 1 : $\dim(D)=1$.

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ de D est un vecteur directeur de D ;

On écrit :

$$D = \text{Vect}(\vec{u})$$

Définition 4.3 On dit aussi que $\vec{u}$ non nul de D est une base de D :

$$\text{Soit } D = \{t\vec{u}; t \in \mathbb{R}\}$$

4.1 Représentation paramétrée

On notera $\vec{u} = (a, b, c)$:

$$D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } x = ta, y = tb, z = tc\} :$$

Définition 4.4 Un plan vectoriel P est l'ensemble des vecteurs :

$$P = \{s\vec{u} + t\vec{v}; s, t \in \mathbb{R}\}$$

On dit que la dimension de P est 2 : $\dim(P) = 2$.

On écrit :

$$P = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$$

représentation paramétrique (représentation paramétrée) : On notera $\vec{u} = (a, b, c)$: et $\vec{v} = (e, f, g)$:

$$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } x = sa + te, y = sb + tf, z = sc + tg \}$$

Définition 4.5 Tout couple de vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel P est une base de P .

Exemple 4.1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $P = \{(s, t, 3s + t), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$: P est le plan de base $u = (1, 0, 3)$ et $v = (0, 1, 1)$

4.2 Equations cartésiennes

Un plan vectoriel a pour équation cartésienne

$$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } ax + by + cz = 0 \}$$

Interprétation : $\vec{u} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à P .

Une droite vectorielle est l'intersection de 2 plans; elle a pour équation cartésienne :

$$D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } ax + by + cz = 0 \text{ et } ex + fy + gz = 0\}$$

On peut obtenir une représentation paramétrique de la droite en résolvant le système : deux inconnues en fonction de la troisième...

Exemple 4.2 Dans $\mathbb{R}^3$

Déterminer une équation) cartésienne du plan P :

$$x = 2s - t, y = t, z = s + t$$

La droite $D : x = u, y = 2u, z = -u$ est elle incluse dans P ?

D est-elle orthogonale P ?

Dans $\mathbb{R}^3$

Une équation) cartésienne du plan P :

$$x = 2s - t, y = t, z = s + t$$

peut s'obtenir en cherchant un vecteur normal l'aide du produit vectoriel de $\vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ vecteurs directeurs de P .

On obtient une équation) cartésienne de P :

$$-x - 3y + 2z = 0$$

La droite $D : x = u, y = 2u, z = -u$

est elle incluse dans P si $-u - 3(2u) + 2(-u) = 0$:

non, D n'est pas incluse dans P ; autres méthodes possibles par les vecteurs directeurs...

D est-elle orthogonale P ?

Non : Il suffit de remarquer que le vecteur $(1, 2, -1)$, vecteur directeur de D n'est pas colinéaire un vecteur normal P, soit le vecteur $(-1, -3, 2)$.

Remarque 4.1 *On peut intuitivement se représenter une droite vectorielle par un immense bouquet de fleurs dont les tiges sont parallèles et de longueur variables. On peut intuitivement se représenter un plan vectoriel par un immense millefeuille !*

Exemple 4.3 *Dans $\mathbb{R}^3$, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit $\vec{u}$ de composantes $(1, 1, 3)$: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$*

Soit $F = \{x\vec{i} + x\vec{j} + 3x\vec{k}; x \in \mathbb{R}\} = \{x\vec{u}, x \in \mathbb{R}\}$: F est la droite vectorielle engendré par le vecteur $\vec{u}$;

Exemple 4.4 *Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, 3x + y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: F est le plan vectoriel engendré par $v = (1, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$:*

Exemple 4.5 *Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } x + y = 0 \text{ et } x - 3y + z = 0\}$:*

En résolvant le système $x + y = 0$ et $x - 3y + z = 0$, on obtient $y = -x$ et $z = -4x$: donc F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, -1, -4)$.

C'est l'intersection de deux plans... Généralisons...

4.3 Intersections dans $\mathbb{R}^3$

Quelle est l'intersection de F et de G dans les cas suivants ?

Exemple 4.6 *Soit $\vec{a} = (5, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$ et $\vec{c} = (2, -1, 1)$*

Soit $D = \text{Vect}(\vec{a})$:

Cela veut dire que $\vec{a}$ est un vecteur directeur de D

$$P = \text{Vect}(\vec{b}, \vec{c})$$

Cela veut dire que $(\vec{b}, \vec{c})$ sont des vecteurs directeurs de P

$$D = \{x\vec{a}, x \in \mathbb{R}\}$$

D est engendrée par le vecteur $\vec{a}$.

$$D = \{(5x, x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$$

C' est la droite vectorielle, de base $\vec{a}$; $\dim D = 1$

$$P = \{y\vec{b} + z\vec{c}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

P est le plan vectoriel, de base $\vec{b} = (1, 3, 1)$ et $\vec{c} = (2, -1, 1)$

$$P = \{(y + 2z, 3y - z, y + z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} :$$

$$\dim P = 2$$

L'intersection d'une droite et d'un plan est :

Soit la droite si celle ci est incluse dans le plan ;

Soit le vecteur nul, seul commun à tous les plans et droites...

On peut procéder de diverses manières :

- Voir si les vecteurs $\vec{a} = (5, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$ et $\vec{c} = (2, -1, 1)$ sont ou non coplanaires ; on peut calculer le déterminant de ces vecteurs ; il est nul. On peut aussi remarquer que $\vec{a} = \vec{b} + 2\vec{c}$ Donc l'intersection de D et de P est la droite D

Exemple 4.7 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, 3x + y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: F est le plan vectoriel engendré par $v = (1, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$.

Quelle est l'intersection de F et de G ?

Exemple 4.8 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \text{ tel que } : x + y - 3z = 0\}$;

Soit $G = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$, avec : $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$

L'intersection de 2 plans est :

Une droite vectorielle, sauf si ces plans sont confondus Or : On peut remarquer que $\vec{a}$ appartient à F mais que $\vec{b}$ n'appartient pas à F Donc l'intersection des 2 plans F et G est la droite vectorielle de base $\vec{a}$.

5 Exercices

Exercice 5.1 Soient $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(2, 1, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle non orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 5.2 On considère un triangle ABC avec $A(2, -1, 1)$, $B(1, -3, -5)$ et $C(3, -4, -4)$.

1. Déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC .
2. Déterminer le cosinus des angles du triangle ABC .
3. Déterminer une mesure en radians des angles du triangle ABC .

Exercice 5.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour les vecteurs suivants.

1. $\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(-2, 3, 1)$.
2. $\vec{u}(-1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.
3. $\vec{u}(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 1)$ et $\vec{v}(\cos(\beta), \sin(\beta), 1)$ où α et β désignent deux réels.

Exercice 5.4 Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On considère les vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

5.1 Plans et droites

Exercice 5.5 On considère le point $A(1, -2, 4)$ et les vecteurs $\vec{u}(0, 2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3, 1)$.

1. Un plan dans l'espace possède-t-il plusieurs types d'équations ?
2. Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est-il bien défini ?
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par deux méthodes différentes.

Exercice 5.6 On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Le plan passant par A, B et C est-il bien défini ?
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par A, B et C .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par A, B et C par deux méthodes différentes.

Exercice 5.7 Déterminer une représentation paramétrique du plan vectoriel qui a pour équation cartésienne $2x + y + z = 0$.

Exercice 5.8 On considère les points $A(-1, 2, 3)$ et $B(0, 1, -2)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$.

1. Une droite dans l'espace possède-t-elle plusieurs types d'équations ?
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points A et B .

Exercice 5.9 Déterminer une représentation paramétrique de la droite vectorielle définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y - 7z = 0. \end{cases}$$

Exercice 5.10 Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles et non confondues.
2. Démontrer que (D_2) et (D_3) ne se coupent pas.
3. Démontrer que (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point et calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 5.11 Soit (P) le plan vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ et soit (D) la droite dirigée par $\vec{u}(1, 3, 1)$.

1. La droite (D) est-elle parallèle (P) ?
2. La droite (D) est-elle orthogonale (P) ?
3. La droite dirigée par le vecteur $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est-elle orthogonale (P) ?

Exercice 5.12 On considère le plan (P) défini par le point $A(1, 1, 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

1. Le plan (P) passe-t-il par l'origine ?
2. Soit (D) la droite passant par l'origine et orthogonale (P) . Déterminer un vecteur directeur de (D) .

6 Solutions des exercices

Soient $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(2, 1, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux car leur produit scalaire est non nul et vaut -11 .
3. On calcule $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ par la formule du cours et on obtient un angle de $61\pi/90$.

On considère un triangle ABC avec $A(2, -1, 1)$, $B(1, -3, -5)$ et $C(3, -4, -4)$.

1. Les longueurs des cotés du triangle ABC sont :
 $AB = \sqrt{41}$; $AC = \sqrt{35}$; $BC = \sqrt{6}$;
2. Le triangle est rectangle en C d'après le théorème de Pythagore.
Puis on calcule $\cos\sqrt{35}\sqrt{41}$
le cosinus des angles du triangle ABC .

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Calcul de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour les vecteurs suivants.

1. $\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(-2, 3, 1)$.
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(-4, -3, 1)$
2. $\vec{u}(-1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(-1, 1, -1)$
3. $\vec{u}(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 1)$ et $\vec{v}(\cos(\beta), \sin(\beta), 1)$
On trouve $\vec{u} \wedge \vec{v}(\sin(\alpha) - \sin(\beta), \cos(\beta) - \cos(\alpha), \sin(\alpha - \beta))$

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

On considère les vecteurs

$\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires est le déterminant $ad - bc$ est nul.

6.1 Plans et droites

On considère le point $A(1, -2, 4)$ et les vecteurs $\vec{u}(0, 2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3, 1)$.

1. Un plan dans l'espace possède plusieurs types d'équations :
équation cartésienne, représentation paramétrique.
2. Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est bien défini car $\vec{u} \wedge \vec{v}(5, -1, -2)$
3. Une représentation paramétrique du plan qui passe par A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\begin{cases} x & = & 1 + s \\ y & = & -2 + 2t + 3s \\ z & = & 4 - t + s \end{cases}$$

4. Une équation cartésienne du plan qui passe par

A et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

s'obtient par le calcul d'un vecteur normal :

$$\vec{u} \wedge \vec{v}(5, -1, -2)$$

Comme le plan passe par A , on obtient une équation cartésienne :

$$5x - y - 2z + 1 = 0$$

On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Le plan passant par A, B et C est bien défini car $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(1, 1, 1)$

2. Une représentation paramétrique du plan qui

passe par A, B et C est :

$$x = 1 - r - t, y = r, z = s \quad r \text{ et } s \text{ tant les 2 paramètres.}$$

3. Une équation cartésienne du plan qui passe par A, B et C s'obtient par le calcul d'un vecteur normal :

$$\vec{n}(1, 1, 1)$$

Et donc une équation cartésienne est :

$$x + y + z = 1 \quad \text{car } A \text{ appartient au plan.}$$

Ou bien, on peut remarquer que les 3 points vérifient la condition :

$$x + y + z = 1$$

et le plan est bien défini par ces 3 points...

Une représentation paramétrique du plan vectoriel qui a pour équation cartésienne $2x + y + z = 0$ est :

$$\begin{cases} x & = x \\ y & = y \\ z & = -2x - y \end{cases}$$

On a choisi ici les paramètres x et y .

On peut avoir facilement 2 vecteurs directeurs du plan :

$$\vec{u}(1, 0, -2), \text{ et } \vec{v}(0, 1, -1)$$

On considère les points $A(-1, 2, 3)$ et $B(0, 1, -2)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$.

1. Une droite dans l'espace possède plusieurs types d'équations, une représentation paramétrique et des équations cartésiennes.

2. Une représentation paramétrique de la droite

qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est :

$$\begin{cases} x & = -1 + t \\ y & = 2 + 2t \\ z & = 3 + t \end{cases}$$

3. Une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points A et B est :

$$\begin{cases} x & = -1 + t \\ y & = 2 - t \\ z & = 3 - 5t \end{cases}$$

On a facilement $\vec{AB}(1, -1, 5)$

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite vectorielle définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y - 7z = 0. \end{cases}$$

on résout le système par exemple, x et y en fonction de z :

Alors :

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z = 2(1) \\ x - y + z = 0.(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3(3) \\ x + z = 1.(4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3(5) \\ x - 2y = 1.(6) \end{cases}$$

1. Pour démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles

et non confondues, on peut soit chercher un vecteur directeur de chaque droite par exemple en cherchant une représentation paramétrique ; on choisit par exemple z comme paramètre.

On peut aussi ajouter les équations (1) et (2) et voir que les droites (D_1) et (D_2) sont aussi données par :

(D_1) :

$$\begin{cases} x + z = 1(1) \\ y = 1.(2) \end{cases}$$

(D_2) :

$$\begin{cases} x + z = 1(1) \\ y = 3.(2) \end{cases}$$

2. (D_2) et (D_3) ne se coupent pas car en cherchant les coordonnées d'un point d'intersection, on arrive

une impossibilité.

3. (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point $M(3,1,-2)$ que l'on obtient en cherchant les coordonnées d'un point d'intersection.

Soit (P) le plan vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ et soit (D) la droite dirigée par $\vec{u}(1,3,1)$.

1. La droite (D) n'est pas parallèle à (P) car $\vec{u}(1,3,1)$ vecteur directeur de (D) ne vérifie pas l'équation cartésienne de (P) .

2. La droite (D) n'est pas orthogonale à (P) car un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(2,-1,1)$ non colinéaire à $\vec{u}(1,3,1)$.

3. La droite dirigée par le vecteur $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est orthogonale à (P) car $\vec{v}(-2, 1, -1)$ est égal à $\vec{n}(2, -1, 1)$.

On considère le plan (P) défini par le point $A(1, 1, 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

1. Pour savoir si le plan (P) passe par l'origine, on a plusieurs possibilités :

On peut chercher une équation cartésienne du plan :

On obtient :

$$x + y - z = 2;$$

Et donc le plan (P) ne passe pas par l'origine.

2. Soit (D) la droite passant par l'origine et orthogonale à (P) a pour vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{v}(1, 1, -1)$.