LICENCE SCIENCES et TECHNOLOGIES

Mention Mathématiques et Informatique
Parcours Mathématiques

- Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

Alain Thomas
CMI Université de Provence
39, rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13
thomas@cmi.univ-mrs.fr

Université de Provence
– CTES –

Unité d'enseignement UE1-4

Algèbre et Analyse Élémentaires

Année 2007-2008

Préface

Ce document est destiné aux étudiants du Télé-Enseignement Sciences (CTES) de l'Université de Provence, inscrits à l'unité UE1-4 de la licence 1ère année ; il ne peut pas être utilisé à d'autres fins sans l'accord préalable du CTES.

Le début de ce cours concerne quelques notions généralement utilisées en mathématiques : la logique, les ensembles et les fonctions, les démonstrations par récurrence.

Le chapitre 3 porte sur la notion de démonstration par récurrence et les dénombrements (analyse combinatoire). Le chapitre 4 définit ce qu'est un groupe ; en exercice on retrouve les groupes les plus usuels, plus quelques autres exemples.

Il y a plusieurs façons de définir l'ensemble des nombres réels ; le chapitre 5 présente l'une d'entre elles. Les chapitres suivants sont relativement indépendants des cinq premiers. Ils portent sur les suites et, pour ce qui est du chapitre 6, on y trouve la définition de la limite d'une suite, quelques théorèmes sur les limites de sommes, produits ou quotients de suites, et le théorème sur la convergence des suites monotones.

Dans le chapitre 7 on trouvera les propriétés et les notions élémentaires relatives aux suites ; ce chapitre complète le précédent. Le chapitre 8 contient la définition des séries, avec quelques exemples.

Au chapitre 9 on trouvera la définition de l'équivalence des suites et, sur des exemples, quelques méthodes pour déterminer la vitesse de convergence. Le chapitre 10 concerne les suites définies par relation de récurrence, et décrit une des techniques d'approximation des solutions d'équations.

Nous rappelons que le programme sommaire du module est :
Langage et utilisation des ensembles et des applications.
Dénombrement.
Notion de groupe (sur des exemples).
Relations d'ordre, nombres réels, bornes inférieures et supérieures.
Suites et limites.
Notion de série (séries géométriques et séries à termes positifs).

Ont contribué à la conception de ce cours :
Michel Challulau,
Jean-Louis Michela,
Alain Thomas.

Adresse commune :
Université de Provence
CMI, 39 rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cédex 13

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de logique

Le but de ce chapitre est de définir de façon rigoureuse les notions logiques généralement utilisées en mathématiques (propositions, implications, quantificateurs, ...). Une fois ces définitions assimilées, il reste bien sûr à savoir les utiliser dans les exercices de mathématiques, au niveau des méthodes de raisonnement et de la rédaction des solutions.

1.1 Calcul sur les propositions

On accepte d'une manière intuitive, naïve, qu'une proposition est une phrase dont on peut dire qu'elle est vraie ou fausse.

Par exemple : « le nombre 7 est pair » est une proposition fausse ;
« le nombre 4 est pair » est une proposition vraie.

Par convention nous noterons une proposition par une lettre minuscule de l'alphabet, en général p, q, r, ... Nous noterons la valeur de vérité d'une proposition par V si elle est vraie, et par F si elle est fausse.

Nous allons maintenant définir quelques « opérations » sur les propositions en donnant une table de vérité pour chacune d'entre elles. Ces opérations sont couramment utilisées dans le raisonnement mathématique.

1 **Négation**

Étant donné une proposition p, on appellera « négation de p » et on notera $\neg p$ la proposition qui est fausse si p est vraie, et vraie si p est fausse. La table de vérité de la proposition $\neg p$ est donc :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Par exemple la proposition « le nombre 7 est pair » est fausse, sa négation « le nombre 7 n'est pas pair » est vraie.

Autre exemple (non mathématique) : si je dis « le mois dernier il a plu tous les jours » j'énonce (vraisemblablement) une proposition fausse. Pour prouver

qu'elle est fausse il suffit de choisir un jour du mois dernier parmi les jours où il n'a pas plu. La négation de cette proposition est vraie et elle consiste à dire « il existe un jour du mois dernier où il n'a pas plu ».

2 Conjonction

Étant donné deux propositions p et q, on appellera « conjonction de p et q » et on notera $p \wedge q$ la proposition qui est vraie si chacune des deux est vraie et qui est fausse dans les autres cas. Pour remplir la table de vérité de la proposition $p \wedge q$ on considère les quatre cas possibles : si p est vraie alors q peut être vraie ou fausse, si p est fausse alors q peut être vraie ou fausse ; mais la proposition $p \wedge q$ n'est vraie que dans un seul cas :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple la proposition « 7 est pair et 4 est pair » est fausse ; on est dans le troisième cas de la table de vérité, c'est à dire p est fausse et q est vraie.

3 Disjonction

Étant donné deux propositions p et q, on appellera « disjonction de p et q » et on notera $p \vee q$ la proposition qui est vraie si au moins une des deux est vraie et qui est fausse sinon. D'où la table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Par exemple la proposition « 7 est pair ou 4 est pair » est vraie ; on est toujours dans le troisième cas de la table de vérité.

Autre exemple : la proposition « $7 \geq 4$ » signifie « 7 est plus grand ou égal à 4 ». Elle est vraie parce qu'on est dans le deuxième cas de la table : « 7 est plus grand que 4 » est vraie et « 7 est égal à 4 » est fausse.

4 Implication

Étant donné deux propositions p et q, la proposition « p implique q » sera notée $p \Rightarrow q$. Elle signifie que si p est vraie, alors q est vraie. On considèrera que cette proposition n'affirme rien dans le cas où p est fausse, c'est à dire dans ce cas la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie quelque soit la valeur de vérité de q. On a donc la table de vérité suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Par exemple si on choisit préalablement un nombre réel, qu'on appellera a, la proposition « $a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$ » est vraie :
s'il se trouve qu'on a choisi le nombre $a = 2$, on est dans le premier cas (les propositions « $a = 2$ » et « $a^2 = 4$ » sont vraies) ;
si on a choisi $a = -2$ on est dans le troisième cas (« $a = 2$ » est fausse et « $a^2 = 4$ » est vraie) ;
si on a choisi $a = 3$ (ou tout nombre réel différent de 2 et -2) on est dans le quatrième cas (« $a = 2$ » et « $a^2 = 4$ » sont fausses).

5 Équivalence

Étant donné deux propositions p et q, la proposition « p équivaut à q » sera notée $p \Leftrightarrow q$. Elle signifie que p et q ont même valeur de vérité, c'est à dire cette proposition est vraie si p et q sont toutes deux vraies, ou si p et q sont toutes deux fausses, et elle est fausse dans les autres cas :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Par exemple la proposition « $a = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4$ » peut fort bien être fausse : s'il se trouve que $a = -2$ alors « $a = 2$ » est fausse mais « $a^2 = 4$ » est vraie.

1.2 Fonctions propositionnelles, quantificateurs

On appelle **fonction propositionnelle** sur un ensemble E une proposition qui est « fonction » d'un élément x, appartenant à l'ensemble E.

Considérons par exemple la fonction propositionnelle « $x^2 = 4$ » sur l'ensemble $\mathbb{R}$. Contrairement à une proposition (qui est soit vraie, soit fausse), la proposition « $x^2 = 4$ » est vraie pour les éléments $x = -2$ et $x = 2$, et fausse pour les autres éléments de $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

ce qui signifie : l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $x^2 = 4$ est égal à l'ensemble dont les éléments sont -2 et 2.

On appelle **quantificateurs** les deux symboles suivants :
Le quantificateur universel, noté $\forall$. Quand on écrit « $\forall x \in E,\ p(x)$ », ça

signifie que pour tout x appartenant à E, la proposition $p(x)$ est vraie.
Le quantificateur existentiel, noté $\exists$. L'écriture « $\exists x \in E,\ p(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $p(x)$ soit vraie.

Par exemple quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ », ce n'est plus une fonction propositionnelle mais une proposition puisqu'elle est soit vraie soit fausse. En l'occurence elle est vraie puisqu'il existe un réel, par exemple le réel $x = 2$, dont le carré vaut 4.

Autre exemple : la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » est fausse car si elle était vraie, tous les réels auraient pour carré 4.

Un exemple avec deux quantificateurs : la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y > x$$

signifie qu'étant donné un réel quelconque x, il existe un réel y strictement supérieur à x. Cette proposition est évidemment vraie, mais si on permute les deux quantificateurs on obtient une proposition fausse :

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y > x.$$

En effet si cette dernière était vraie on pourrait trouver un réel y tel que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}\ y > x$ » soit vraie, autrement dit ce réel y serait strictement supérieur à tous les réels.

1.3 Exercices sur le chapitre 1

***Exercice* 1.1**
Objectif : démontrer qu'une proposition, contenant des quantificateurs, est vraie.

Pour chacune des propositions suivantes, peut-on trouver un intervalle $I = [a; b]$, avec $a < b$, tel que cette proposition soit vraie :

1) $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$;

2) $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \ x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$;

3) $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ \ x < y \wedge \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$.

***Exercice* 1.2**
Objectif : construire des fonctions propositionnelles vraies pour tout x, ou vraies pour certains x.

1) Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}\ (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit vraie.

2) Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}\ (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit fausse mais $\exists x \in \mathbb{R}\ (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit vraie.

3) Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition $\exists x \in \mathbb{R}\ (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit fausse.

***Exercice* 1.3**
Objectif : expliciter des propositions écrites en termes mathématiques.

Expliquer pourquoi les propositions suivantes sont vraies :
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ x \geq y$;
$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ x \geq y$;

alors qu'une seule des deux suivantes est vraie :
$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ x \geq y$;
$\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z}\ x \geq y$.

Chapitre 2

Ensembles et applications

Nous acceptons la notion intuitive d'ensemble, et la notion d'élément d'un ensemble ; nous allons définir quelques notations et symboles souvent utilisés en mathématiques.

2.1 Élements et sous-ensembles

1 **Appartenance**

Nous noterons en général les ensembles par des lettres majuscules : $E, F, A, B, \ldots$, et les éléments par des minuscules : $x, y, a, b, \ldots$. La notation $x \in E$ signifie « x appartient à E », c'est à dire « x est un élément de E ». La notation $x \notin E$, signifie « x n'appartient pas à E ».

Par exemple « $2 \in \{1, 2, 3\}$ » signifie que 2 appartient à l'ensemble dont les éléments sont $1, 2, 3$. Autre exemple : « $2 \in \{2\}$ », c'est à dire 2 appartient à l'ensemble dont le seul élément est 2.

On notera $\emptyset$ l'ensemble qui n'a aucun élément.

2 **Inclusion**

La notation $E \subset F$ signifie que E est inclus dans F, c'est à dire tous les éléments de E appartiennent à F. On dit aussi « E est un sous-ensemble de F », ou « E est une partie de F ».

Par exemple, pour démontrer que $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers) est inclus dans $\mathbb{Q}$ (ensemble des quotients d'entiers) on considère tous les éléments de $\mathbb{Z}$: soit n un élément de $\mathbb{Z}$ (non précisé), puis on prouve que $n \in \mathbb{Q}$ en constatant que $n = \dfrac{n}{1}$ est bien le quotient de deux entiers.

La notation $E \not\subset F$ signifie que E n'est pas inclus dans F c'est à dire : les éléments de E n'appartiennent pas tous à F. Pour la démontrer, il suffit de trouver un élément de E qui n'appartienne pas à F.

Par exemple, on démontre la non-inclusion $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ en choisissant l'élément $\dfrac{1}{2}$ de $\mathbb{Q}$ (ou toute autre fraction dont le dénominateur n'est ni 1 ni -1) et en

constatant qu'il n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

On dira que deux ensembles E et F sont égaux lorsqu'ils ont mêmes éléments. Autrement dit E et F sont égaux lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$.

Remarquons que les notations $x \in E$ et $\{x\} \subset E$ signifient la même chose : la première se traduit par « x appartient à E », et la seconde par « l'ensemble dont le seul élément est x, est inclus dans E ». Pour la clarté de la rédaction on emploie toujours la notation $\in$ pour les éléments et la notation $\subset$ pour les ensembles.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E (ou parties de E), c'est à dire l'ensemble des ensembles qui sont inclus dans E.

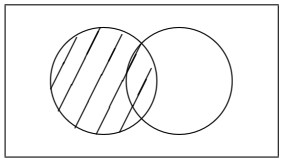
Considérons par exemple l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$; il a trois éléments tandis que $\mathcal{P}(E)$ a 8 éléments, dont voici la liste :

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}.$$

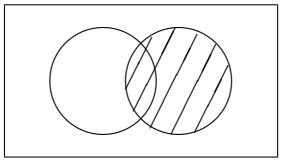
2.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E ; on notera
$A \cup B$ (**réunion** de A et B) l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B ;
$A \cap B$ (**intersection** de A et B) l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B ;
$A \Delta B$ (**différence symétrique** de A et B) l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B, mais pas aux deux à la fois ;
$E \setminus A$ (c'est à dire « E moins A », ou « complémentaire de A dans E ») l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Pour illustrer ces définitions on peut représenter E par un rectangle, et A et B par deux disques :

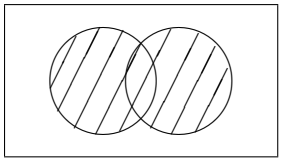


Ensemble A (hachuré)

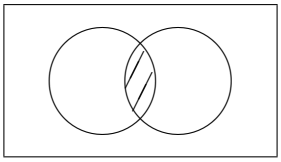


Ensemble B (hachuré)

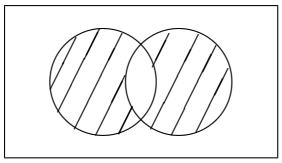
puis on represente chacun des sous-ensembles qu'on a défini :



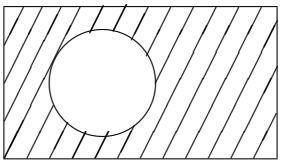
Ensemble $A \cup B$



Ensemble $A \cap B$



Ensemble $A \Delta B$



Ensemble $E \setminus A$

2.3 Produit cartésien $E \times F$, applications de E dans F

1 Produit cartésien

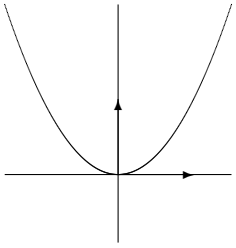
Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Cet ensemble est noté $E \times F$. On dira que deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Dans le cas $E = F$, l'ensemble $E \times E$ est noté E^2. Par exemple $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

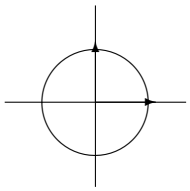
2 Relations entre éléments de E et éléments de F

On appelle **relation** entre éléments de E et éléments de F, une fonction propositionnelle sur l'ensemble $E \times F$. On lui associe naturellement l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times F$ pour lesquelles cette fonction propositionnelle est vraie.

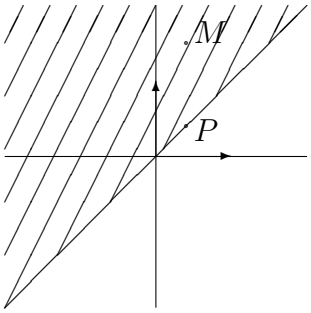
Donnons trois exemples de relation dans le cas $E = F = \mathbb{R}$:
« $y = x^2$ » est une relation entre éléments de $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction propositionnelle dont la variable est $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On peut la représenter par l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $y = x^2$, c'est à dire la parabole d'équation $y = x^2$:



Autre exemple : on associe à la relation $x^2 + y^2 = 1$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $x^2 + y^2 = 1$, c'est à dire le cercle de rayon 1 centré en O :



Le troisième exemple est un peu différent : on considère la relation $x \leq y$. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $x \leq y$, est le demi-plan hachuré, au dessus de la bissectrice principale des deux axes. En effet quel que soit le point P de cette bissectrice et quel que soit le point M au dessus de P, les coordonnées de P sont (x, x) et celles de M sont (x, y) avec $x \leq y$:



En général, par analogie avec l'exemple ci-dessus, une relation entre éléments de E et éléments de F sera donnée sous la forme $x\mathcal{R}y$, où $x \in E$ et $y \in F$. Autres exemples d'utilisation de cette notation :
la relation $x \in A$ (entre éléments de E et éléments de $\mathcal{P}(E)$) ;
la relation $A \subset B$ (entre éléments de $\mathcal{P}(E)$).

3 Applications de E dans F

On dit qu'une relation entre éléments de E et éléments de F définit une **application**, lorsque pour tout élément $x \in E$ il existe un seul élément

$y \in F$ qui soit en relation avec x ; on utilise la notation $y = f(x)$ et on dit que y est fonction de x. Plus précisément on dit que « y est l'image de x par f », et « x est un antécédent de y par f ». L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de f, ou domaine de définition de f, et F **ensemble d'arrivée** de f, ce qu'on résume en écrivant $f : E \to F$.

Par exemple la relation $y = x^2$ (entre éléments de $\mathbb{R}$) définit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^2$.

Par contre la relation $x^2 + y^2 = 1$ ne définit pas une application : l'égalité $x^2+y^2 = 1$ équivaut à $y^2 = 1-x^2$ c'est à dire $y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$, ce qui fait qu'un réel donné (par exemple $x = 0$) peut être en relation avec deux réels ($x = 0 \Rightarrow y = 1$ ou -1).

Quant à la relation $x \leq y$, elle ne définit évidemment pas une application : étant donné un réel x, tous les éléments y de l'intervalle $[x; +\infty[$ vérifient la relation $x \leq y$.

4 Injections

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** lorsqu'il n'existe pas deux éléments distincts x_1 et x_2 de E, tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

5 Images, surjections

Soit une application $f : E \to F$. On appelle **image de** f l'ensemble des $f(x)$ pour tout x dans E. L'image de f est notée $f(E)$, ou $\mathrm{Im}f$.

Ne pas confondre avec l'ensemble d'arrivée : par exemple l'ensemble d'arrivée de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, c'est $\mathbb{R}$; mais son ensemble image est $\mathbb{R}^+$ puisque seuls les éléments de $\mathbb{R}^+$ sont images d'éléments de $\mathbb{R}$ (plus précisément, si y appartient à $\mathbb{R}^+$ alors $y = f(\sqrt{y})$).

Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** lorsque pour tout élément y de F il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ce qui équivaut à dire que $f(E) = F$.

Pour toute partie A de E on appelle aussi **image de** A **par** f, et on note $f(A)$, l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in A$.

6 Bijections

Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** lorsqu'il elle est injective et surjective. Ceci équivaut à dire : pour tout élément $y \in F$, il existe un élément unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut donc démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective en vérifiant que chaque élément de F a un seul antécédent.

Par exemple pour savoir si l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x+3$ est bijective, on cherche les antécédents d'un réel y quelconque : ce sont les réels x tels que $y = 2x+3$, et il n'y en a qu'un c'est $x = \dfrac{y-3}{2}$, ce qui prouve que f est bijective.

Si $f : E \to F$ est bijective, on note $f^{-1}(y)$ l'antécédent de chaque élément y de F. Avec cette notation, f^{-1} est une application de F dans E.

7 Images réciproques

Soit une application $f : E \to F$, et soit B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B par f, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in B$. On note $f^{-1}(B)$ cet ensemble (ce qui ressemble à la notation $f^{-1}(y)$ utilisée dans le cas où f est bijective ; mais y et $f^{-1}(y)$ sont des éléments, tandis que B et $f^{-1}(B)$ sont des ensembles).

2.4 Exercices sur le chapitre 2

***Exercice* 2.1**
Objectif : comment démontrer que deux ensembles sont égaux, ou qu'ils sont différents.
Soit E un ensemble non vide. L'égalité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ est-elle valable pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$?

***Exercice* 2.2**
Objectif : utiliser les opérations sur les ensembles, et la relation d'appartenance.
Démontrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

***Exercice* 2.3**
Objectif : utiliser les opérations sur les ensembles.
Soient les ensembles $A = [2; 5]$ et $B = [3; 6]$.
1) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A\Delta B$ et $A \times B$.
2) Représenter $A \times B$ et $B \times A$ dans le plan. Trouver C et D tels que $(A \times B) \cap (B \times A) = C \times D$; mais prouver qu'il n'existe pas C, D tels que $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$.

***Exercice* 2.4**
Objectif : utiliser la réunion, l'intersection et la relation d'appartenance.
Soit un ensemble E, et deux parties A et B de E. Démontrer l'équivalence

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

***Exercice* 2.5**
Objectif : Déterminer si une relation est une application.
Parmi les quatre relations suivantes (entre éléments de $\mathbb{R}$), lesquelles définissent une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
$x\mathcal{R}_1 y$ si $x + y = 1$;
$x\mathcal{R}_2 y$ si $x = 2y + 3$;
$x\mathcal{R}_3 y$ si $x = y^2$;
$x\mathcal{R}_4 y$ si $xy = 1$.

***Exercice* 2.6**
Objectif : utiliser la définition de l'image.
Le nombre 1 appartient-il à l'image des fonctions suivantes ?

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad f_3(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

***Exercice* 2.7**
Objectif : utiliser la définition de l'image.
Soit $f : E \to F$ une application, et soient A et B deux parties de E.
1) Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2) Trouver un exemple d'application $f : E \to F$ et de parties A, B de E tels que la relation $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ soit fausse.

***Exercice* 2.8**
Objectif : utiliser les définitions relatives aux applications.
On considère la relation $\mathcal{R}$ entre éléments de l'intervalle $[0; 1]$, définie par :
$x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y = x(1 - x)$.
1) Démontrer que cette relation définit une application f de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.
2) Trouver deux éléments de $[0; 1]$ qui ont même image par f.
3) f est-elle injective ? surjective ?

***Exercice* 2.9**

Objectif : modifier les ensembles de départ et d'arrivée d'une application, de façon à obtenir une bijection.

On considère les fonctions suivantes (applications d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

$$g_1(x) = x^2, \quad g_2(x) = x^3, \quad g_3(x) = \frac{1}{x}, \quad g_4(x) = \ln x, \quad g_5(x) = e^x, \quad g_6(x) = \cos x,$$

$$g_7(x) = \sin x, \quad g_8(x) = \tan x.$$

1) Trouver le domaine de définition de chacune d'entre elles.

2) Pour $k = 1, 2, \ldots, 8$ trouver une bijection $h_k : I \to J$ qui soit une restriction de g_k *(c'est à dire l'intervalle I est inclus dans l'ensemble de définition de g_k, l'intervalle J est inclus dans son ensemble d'arrivée, et $h_k(x) = g_k(x)$ pour tout $x \in I$).*

***Exercice* 2.10**

Objectif : déterminer des images réciproques.

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{5x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Déterminer l'image réciproque de chacun des quatre ensembles suivants :
$\{0\}$; $\{1, 3\}$; $\left\{\frac{1}{5}\right\}$; $[0; +\infty[$.

Chapitre 3

Récurrences. Dénombrements

C'est une méthode de démonstration qu'on rencontre souvent en mathématiques, par exemple pour l'étude des suites, dans des problèmes d'arithmétique, ou pour établir toute formule faisant intervenir des entiers.

3.1 Théorème de récurrence

3.1 Théorème. *Soit P une fonction propositionnelle sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Si :*
• *la proposition $P(0)$ est vraie,*
• *pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie,*
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant est une variante, appelée « théorème de la récurrence incomplète » :

3.2 Théorème. *Soit P une fonction propositionnelle sur l'ensemble $\mathbb{N}$, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :*
• *la proposition $P(n_0)$ est vraie,*
• *pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie,*
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Prenons un exemple simple : comment démontrer l'inégalité $2^n > n$ pour tout $n \geq 2$?
• Cette inégalité est vraie pour $n = 2$ puisque $2^2 = 4$ et $4 > 2$.
• Il reste à démontrer l'implication $2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > n+1$ (pour tout entier $n \geq 2$). Supposons que pour un certain entier n on a $2^n > n$. En multipliant par 2 on en déduit $2^{n+1} > 2n$; or $2n$ est strictement plus grand que $n+1$ puisque $2n - (n+1) = n - 1 > 0$; on obtient donc bien $2^{n+1} > n+1$.
D'après le théorème de récurrence incomplète, la démonstration qu'on vient de faire prouve l'inégalité $2^n > n$ pour tout $n \geq 2$. Remarquons qu'on ne peut pas démontrer par récurrence cette inégalité pour tout $n \geq 0$, puisqu'on

a utilisé dans la démonstration l'inégalité $2n - (n+1) = n - 1 > 0$ qui est fausse pour $n = 0$ ou 1. Cependant après avoir constaté que l'inégalité $2^n > n$ est vraie pour $n = 0$ ou 1 ($2^0 = 1 > 0$ et $2^1 = 2 > 1$), on l'a finalement démontrée pour tout $n \geq 0$.

3.2 Dénombrements

Ce paragraphe concerne uniquement les ensembles finis. Rappelons l'exemple donné au chapitre 2 : si $E = \{1, 2, 3\}$, alors l'ensemble des parties de E est

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Remarquons que E a 3 éléments et $\mathcal{P}(E)$ a 2^3 éléments. Nous allons établir par récurrence le théorème suivant :

3.3 Théorème. *Pour tout ensemble E de n éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.*

Preuve. Appelons $P(n)$ la proposition à démontrer. Alors :

• $P(0)$ est vraie : si E a 0 éléments (c'est à dire aucun élément, ce qu'on note $E = \emptyset$) alors $\mathcal{P}(E)$ a un seul élément (cet élément est la partie vide $\emptyset$), et comme $2^0 = 1$ la proposition $P(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Il s'agit de démontrer que $P(n+1)$ est vraie. On considère donc un ensemble quelconque de $n+1$ éléments :

$E = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. On considère toutes les parties de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$; on peut les appeler $F_1, \ldots, F_{2^n}$ puisqu'on a supposé qu'il y en a 2^n. Alors les parties de E sont $F_1, \ldots, F_{2^n}, F_1 \cup \{a_{n+1}\}, \ldots, F_{2^n} \cup \{a_{n+1}\}$, et il y en a deux fois 2^n, c'est à dire 2^{n+1}. $\diamond$

Dans le théorème suivant (qui se démontre aussi par récurrence) on utilise les notations suivantes, pour n et k entiers avec $0 \leq k \leq n$:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ si $n \geq 1$, et $0! = 1$;

$C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3.4 Théorème. *Pour tout ensemble E de n éléments,*

- *le nombre de bijections de E sur E est $n!$;*
- *le nombre de parties à k éléments de E est C_n^k.*

3.3 Formulaire

Factorisations

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{2n} a^k(-b)^{2n-k} \end{aligned}$$

Progressions arithmétiques

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kr) = a + (a+r) + (a+2r) + \cdots + (a+nr) = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}r$$

Progressions géométriques

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

Formules diverses

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 + 2\sum_{1 \leq h < k \leq n} a_h a_k$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \end{aligned}$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Comment utiliser le triangle de Pascal pour développer, par exemple, $(a+b)^6$: on écrit d'abord 1 dans la première case et la dernière case de chaque ligne :

Ligne 0	1						
Ligne 1	1	1					
Ligne 2	1		1				
Ligne 3	1			1			
Ligne 4	1				1		
Ligne 5	1					1	
Ligne 6	1						1

puis on complète avec la règle de remplissage suivante :

x	y
	$x+y$

ce qui donne le triangle de Pascal, dont la ligne n contient les coefficients C_n^k pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (ici on s'est limité à $n = 6$) :

Ligne 0	1						
Ligne 1	1	1					
Ligne 2	1	2	1				
Ligne 3	1	3	3	1			
Ligne 4	1	4	6	4	1		
Ligne 5	1	5	10	10	5	1	
Ligne 6	1	6	15	20	15	6	1

et le développement de $(a + b)^6$ est donc

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

3.4 Exercices sur le chapitre 3

***Exercice* 3.1**
Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n \geq n^2$, pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 qu'on déterminera. A-t-on $2^n \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

***Exercice* 3.2**
Démontrer par récurrence la formule des progressions géométriques.

***Exercice* 3.3**
Soit un réel $x \geq -2$, démontrer par récurrence l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***Exercice* 3.4**
Démontrer que pour tout entier $n \geq 24$, il existe deux entiers $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que $n = 5a + 7b$.

***Exercice* 3.5**
a) Démontrer que, pour n et k entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.
b) En utilisant cette formule, démontrer par récurrence la formule du binôme.

***Exercice* 3.6**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi les entiers $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$, lequel est le plus grand ? *(Indication : on comparera C_n^k et C_n^{k+1})*

Chapitre 4

Groupes

Les exemples les plus classiques de lois de composition (ou opérations) sont l'addition et la multiplication. Mais il y en a d'autres : la composition des applications par exemple. Nous allons définir au premier paragraphe ce qu'on appelle loi de composition interne sur un ensemble E, et à quelles conditions E est un groupe pour cette loi.

4.1 Définition et exemples classiques

4.1 ***Définition.*** *On appellera loi de composition interne sur un ensemble E, toute application de $E \times E$ dans E.*

Par exemple l'addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$: l'image par cette application de tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $x + y$, qui appartient à $\mathbb{R}$. Autre exemple : la soustraction est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$; ce n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$: l'image d'un couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ par la soustraction est $x - y$, qui n'appartient pas à $\mathbb{N}$ si y est strictement plus grand que x.

Quand l'ensemble E et la loi de composition interne sont quelconques, nous noterons en général $*$ cette loi, et l'image du couple $(x, y) \in E \times E$ sera notée $x * y$.

4.2 ***Définition.*** *On dira que $(E, *)$ est un groupe, ou que E est un groupe pour la loi $*$, lorsque*

(i) $*$ est une loi de composition interne sur E ;

(ii) elle est associative, c'est à dire $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tout x, y, z dans E ;

(iii) elle admet un élément neutre, c'est à dire il existe un élément $e \in E$ tel que

$$x * e = e * x = x \quad \text{pour tout } x \in E;$$

(iv) tout élément $x \in E$ admet un symétrique pour la loi $*$, c'est à dire il existe un élément $x' \in E$ tel que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Par exemple vérifions que $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi de composition interne $+$:

tous les réels x, y, z vérifient $(x + y) + z = x + (y + z)$;

l'élément neutre est 0 (on a $x + 0 = 0 + x = x$) ;

et le symétrique de x pour la loi $+$ est $-x$ (on a $x + (-x) = (-x) + x = 0$).

Remarquons qu'il est sous-entendu dans la définition du groupe, que l'élément neutre est une constante, tandis que l'élément symétrique de x dépend de x.

Vérifions aussi que l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des réels non nuls est un groupe pour la multiplication :

on remarque d'abord que cette loi est interne (en ce sens que le produit de deux réels non nuls est un réel non nul) ;

tous les $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ vérifient $(xy)z = x(yz)$;

l'élément neutre est 1 (on a $x1 = 1x = x$) ;

le symétrique (pour la multiplication) du réel non nul x est $\dfrac{1}{x}$ (on a $x\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}x = 1$) ;

et de plus l'élément neutre et le symétrique appartienent eux aussi à $\mathbb{R}^*$.

Un troisième exemple moins évident : étant donné un ensemble E, l'ensemble des bijections de E sur E est un groupe pour la composition des applications. Vérifions le en détail :

Étant donné deux bijections $f : E \to E$ et $g : E \to E$, on appelle composée de f par g l'application notée $f \circ g : E \to E$, définie par $f \circ g(x) = f(g(x))$ pour tout $x \in E$. Pour vérifier que cette loi $\circ$ est interne, il nous faut donc vérifier que $f \circ g$ est aussi une bijection. Si deux réels x_1 et x_2 vérifient $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$, alors $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, d'où on déduit $g(x_1) = g(x_2)$ (parce que f est injective), puis $x_1 = x_2$ (parce que g est injective). Donc $f \circ g$ est injective. Elle est aussi surjective : pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, puis il existe $t \in E$ tel que $x = g(t)$, donc finalement $y = f(g(t)) = f \circ g(t)$. On a démontré que $f \circ g$ est bijective quelles que soient les bijections f et g, c'est à dire la loi $\circ$ est interne dans l'ensemble des bijections de E sur E.

Vérifions maintenant l'associativité : $(f \circ g) \circ h$ est égal à $f \circ (g \circ h)$ parce que, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f(g \circ h(x)) \\ &= f \circ (g \circ h)(x). \end{aligned}$$

L'élément neutre est l'identité sur E (c'est à dire l'application $Id_E : E \to E$ définie par $Id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$), puisque cette application vérifie évidemment $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$.

Démontrons que le symétrique d'une bijection $f : E \to E$ pour la loi $\circ$ est l'application réciproque, notée f^{-1} :

rappelons que pour tout $y \in E$, $f^{-1}(y)$ est l'unique réel x tel que $f(x) = y$; on a donc $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ pour tout $y \in E$, c'est à dire $f \circ f^{-1} = Id_E$;

d'autre part, $f^{-1}(f(x))$ est l'unique réel x' tel que $f(x') = f(x)$, d'où $x' = x$ (puisqu'on a supposé f injective) et par conséquent $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$, c'est à dire $f^{-1} \circ f = Id_E$. On a vérifié $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$, c'est à dire f^{-1} est le symétrique de f pour la loi $\circ$.

Ce troisième exemple de groupe a une particularité : l'égalité $f \circ g = g \circ f$ n'est pas toujours vraie. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, les bijections $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x$ vérifient :

$f \circ g(x) = f(2x) = 2x + 1$;

$g \circ f(x) = g(x + 1) = 2x + 2$.

Nous dirons alors que la loi $\circ$ n'est pas commutative (contrairement à l'addition et la multiplication), et plus généralement

4.3 *Définition.* *Une loi de composition interne $*$ sur un ensemble E est dite commutative lorsque $x * y = y * x$ pour tout $x, y \in E$.*

On dit que $(E, *)$ est un groupe abélien lorsque c'est un groupe dont la loi $*$ est commutative.

Une question naturelle qui se pose est de savoir s'il peut exister plusieurs éléments neutres dans un groupe ; et que deviendrait alors la condition (iv) (existence de l'élément x' tel que $x * x'$ et $x' * x$ soient égaux à l'élément neutre) ? Le théorème suivant y répond.

4.4 Théorème. *Si un ensemble est muni d'une loi $*$ interne, associative, et si cette loi admet un élément neutre, alors l'élément neutre est unique.*

Si un ensemble est muni d'une loi $\star$ interne, associative, si cette loi admet un élément neutre, et si tout élément de l'ensemble admet un symétrique pour cette loi, alors cet élément symétrique est unique.

Preuve. Supposons d'abord que la loi $*$ est interne, associative, et admet deux éléments neutres e_1 et e_2. Alors on a $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ (la première égalité provient du fait que $x = x * e_2$ pour tout x, et la deuxième du fait que $e_1 * x = x$ pour tout x).

Supposons maintenant que la loi $\star$ est interne, associative, admet un élément neutre e, mais qu'il existe un élément x qui admet deux symétriques x'_1 et x'_2. Alors $x'_1 = x'_1 \star e = x'_1 \star (x \star x'_2) = (x'_1 \star x) \star x'_2 = e \star x'_2 = x'_2$. $\diamond$

4.2 Sous-groupes et homomorphismes de groupes

4.5 *Définition.* *Étant donné un groupe $(E, *)$, on dira que $(F, *)$ est sous-groupe de $(E, *)$ lorsque F est un sous-ensemble de E tel que $(F, *)$ est un groupe.*

Pour vérifier (sur des exemples) ces conditions, il est inutile de démontrer l'associativité (c'est à dire $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tout x, y, z dans F) puisque les éléments de F sont des éléments de E et vérifient donc cette condition. Par contre il faut vérifier que la loi $*$ est une loi de composition interne dans F, que l'élément neutre appartient à F, et que l'élément symétrique de tout élément de F appartient à F.

Par exemple il est clair que $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: la somme de deux entiers est un entier, l'élément neutre 0 est un entier, et l'élément symétrique de tout entier x est l'entier $-x$.

4.6 *Définition.* *Étant donné deux groupes $(E_1, *)$ et $(E_2, \star)$, on dira que l'application $f : E_1 \to E_2$ est un homomorphisme de groupe lorsqu'on a, pour tout x et y dans E_1,*

$$f(x * y) = f(x) \star f(y).$$

L'exemple le plus classique est l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = e^x$: c'est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ puisqu'on sait que $e^x \in \mathbb{R}^*$ et $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}$.

4.3 Exercices sur le chapitre 4

***Exercice* 4.1**
a) En supposant connu que $\mathbb{R}$ est un groupe pour l'addition et $\mathbb{R}^*$ un groupe pour la multiplication, en déduire que $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ (mais pas $\mathbb{N}$) sont des groupes pour l'addition et $\mathbb{C}^*, \mathbb{Q}^*$ (mais pas $\mathbb{Z}^*$) sont des groupes pour la multiplication.

b) Pourquoi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ ne sont-ils pas des groupes pour la multiplication ?

***Exercice* 4.2**
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on notera $\dot{n}$ l'ensemble des entiers de la forme $n + 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (cet ensemble est appelé « classe de n modulo 6 »). Par exemple, $\dot{0}$ est l'ensemble des multiples de 6.

On associe à tout couple de classes $(\dot{m}, \dot{n})$, la classe

$$\dot{m}\dot{+}\dot{n} = \text{classe de } m + n \text{ modulo } 6.$$

Vérifier qu'à tout couple de classes correspond une seule classe (c'est à dire, si m et m' sont dans la même classe, de même que n et n', alors $\dot{m}\dot{+}\dot{n} = \dot{m'}\dot{+}\dot{n'}$). Remplir la table de la loi de composition $\dot{+}$:

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$						
$\dot{1}$						
$\dot{2}$						
$\dot{3}$						
$\dot{4}$						
$\dot{5}$						

Expliquer pourquoi $(\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}, \dot{+})$ est un groupe.

***Exercice* 4.3**
On appelle $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ les applications de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, définies par :
$f_0(x) = x$,
$f_1(x) = 1 - x$,
$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$,
$f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$,
$f_4(x) = \dfrac{1}{1-x}$,
$f_5(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

a) Vérifier que ce sont bien des applications de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

b) On remarque que, par exemple, la fonction composée $f_1 \circ f_2$ est égale à f_3. Faire de même pour toutes les fonctions composées $f_h \circ f_k$, puis remplir la table de composition :

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0						
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						

c) Expliquer pourquoi $(\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}, \circ)$ est un groupe. Comparer avec le groupe de l'exercice précédent, et en particulier préciser lequel des deux est abélien.

***Exercice* 4.4**
Soit E un ensemble, et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Laquelle des trois lois de composition $\cup$, $\cap$ et Δ est-elle une loi de groupe sur $\mathcal{P}(E)$?

***Exercice* 4.5**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = ax + b$, où a, b sont deux réels, avec $a \neq 0$. On définit une troisième loi de composition sur $\mathbb{R}$, notée $\bullet$, en posant

$$x \bullet y = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

a) Calculer $x \bullet y$.

b) Démontrer que $(\mathbb{R}, \bullet)$ est un groupe abélien.

***Exercice* 4.6**
Démontrer que la loi de composition sur $\mathbb{R}$, notée T et définie par

$$xTy = \frac{x+y}{2}$$

n'est pas associative et n'admet pas d'élément neutre.

***Exercice* 4.7**
Démontrer que $\{1, i, -1, -i\}$ est un groupe pour la multiplication.

***Exercice* 4.8**
Le produit vectoriel est une loi de composition sur $\mathbb{R}^3$, définie par

$$(x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - y'z,\ zx' - z'x,\ xy' - x'y).$$

Est ce que cette loi est commutative ? associative ? admet un élément neutre ?

***Exercice* 4.9**
On munit l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ d'une loi de composition, notée $\blacksquare$, telle que la table de cette loi soit la suivante :

$\blacksquare$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	5	6	4	3	0	2
2	2	6	3	5	0	4	1
3	3	4	5	2	6	1	0
4	4	3	0	6	1	2	5
5	5	0	4	1	2	6	3
6	6	2	1	0	5	3	4

Vérifier que $\blacksquare$ est une loi interne sur l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, qu'elle est commutative, admet un élément neutre, et que tout élément de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ admet un symétrique pour la loi $\blacksquare$. Pourquoi $(\{0,1,2,3,4,5,6\},\blacksquare)$ n'est-il pas un groupe ?

Chapitre 5

Nombres réels

Historiquement les mathématiciens du temps de l'antiquité ne s'intéressaient qu'aux nombres rationnels, c'est à dire de la forme $\frac{p}{q}$ avec p entier et q entier non nul. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ remonte à l'époque de Pythagore. Mais il existe beaucoup d'autres nombres irrationnels, comme π, e, $\cos\left(\frac{p\pi}{q}\right)$ si l'entier q est assez grand, ... qui pour la plupart ne peuvent pas être exprimés au moyen de sommes, produit, quotients et racines $n^{\text{ièmes}}$ de nombres entiers.

Les nombres rationnels ont l'avantage d'avoir une représentation décimale périodique (sauf éventuellement les premières décimales) : par exemple la représentation décimale $\frac{8}{7} = 0,1142857142857142857\ldots$ est périodique à partir de la deuxième décimale. On peut donc connaître toutes les décimales d'un nombre rationnel quand on en a calculé un certain nombre. Pour avoir une idée de l'ensemble de tous les nombres réels, on peut imaginer toutes les suites de chiffres possibles. Définissons par exemple un réel x par ses décimales, en posant $x = 0,101001000100001\ldots$: les décimales de x valent 0 ou 1 avec (de gauche à droite) un zéro après le premier chiffre 1, deux zéros après le deuxième chiffre 1, ... n zéros après le $n^{\text{ième}}$ chiffre 1. On a ainsi défini un nombre irrationnel, qui vraisemblablement ne peut pas être exprimé autrement que par son écriture décimale.

Dans le premier paragraphe nous allons définir l'ensemble des nombres réels par un certain nombre de propriétés qui le caractérisent. En exercice nous démontrerons que chaque élément d'un tel ensemble (ou son opposé s'il est inférieur à 0) peut être représenté par une écriture décimale, et réciproquement toute écriture décimale définit un élément de cet ensemble.

5.1 Définition de $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est caractérisé par ses propriétés de groupe (voir chapitre 4 pour la définition des groupes), et celles de la relation "plus petit ou égal".

5.1 ***Définition.*** *$\mathbb{R}$ est un ensemble muni de deux lois de composition (notées $+$ et $\times$) et d'une relation (notée $\leq$) qui vérifient les conditions suivantes :*

• *$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif (c'est à dire $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens, où 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$, et la seconde loi est distributive par rapport à la première : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ et $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$) ;*

• *$\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné, ce qui signifie qu'il existe une relation sur $\mathbb{R}$ (notée $\leq$) pour laquelle les trois propositions suivantes sont vraies :*

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$;

2) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$;

3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$;

• *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$, c'est à dire*

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \vee y \leq x$;

• *la relation $\leq$ est compatible avec la structure de corps c'est à dire : si $x \leq y$, alors pour tout réel z on a $x + z \leq y + z$, et pour tout réel z tel que $0 \leq z$ on a $x \times z \leq y \times z$;*

• *$\mathbb{R}$ est archimédien c'est à dire, étant donné deux réels $x > 0$ et $y > 0$, il existe un entier n tel que $x < ny$ (où ny désigne la somme de n termes égaux à y) ;*

• *pour toute suite de segments $[a_0; b_0], [a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots$ telle que $[a_{n+1}; b_{n+1}]$ soit inclus dans $[a_n; b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel qui appartient à $[a_n; b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où on appelle "segment $[a; b]$" l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$).*

Cette dernière propriété, appelée "axiome des segments emboîtés", est équivalente à la propriété de borne supérieure, qu'on va expliciter dans la définition et le théorème suivant.

5.2 ***Définition.*** *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

Un réel M est appelé "majorant de E" lorsque pour tout $x \in E$ on a $x \leq M$.

Un réel S est appelé "borne supérieure de E" lorsque, pour tout $x \in E$ et pour tout M majorant de E, on a $x \leq S \leq M$.

Un réel m est appelé "minorant de E" lorsque pour tout $x \in E$ on a $m \leq x$.

Un réel I est appelé "borne inférieure de E" lorsque, pour tout $x \in E$ et pour tout m minorant de E, on a $m \leq I \leq x$.

Remarquons que si E admet un majorant M, alors il admet une infinité de majorants : tous les réels supérieurs à M sont aussi majorants de E. Par

exemple l'ensemble des majorants d'un intervalle $[a;b]$ est l'intervalle $[b;+\infty[$; l'ensemble des majorants de $]a;b[$ est aussi $[b;+\infty[$. La borne supérieure de chacun de ces deux intervalles est donc b.

Par contre la borne supérieure est unique : si S_1 et S_2 sont bornes supérieures de E, alors on a $S_1 \leq M$ et $S_2 \leq M$ pour tout M majorant de E, et par conséquent on a $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$, donc finalement $S_1 = S_2$.

5.3 Lemme. *Si un nombre réel x vérifie l'inégalité $x \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x \leq 0$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un $x > 0$ tel que $x \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui revient à dire que $n \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ça contredit l'axiome d'Archimède, d'après lequel il existe un entier n tel que $n \cdot 1 > \dfrac{1}{x}$. L'hypothèse de départ est donc fausse. $\diamond$

5.4 Théorème. *Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Si E admet au moins un majorant, alors il admet une borne supérieure.*

Preuve. D'après les hypothèses, E possède au moins un élément x_0 et un majorant M_0. On construit une suite de segments emboîtés en posant :

$[a_0;b_0] = [x_0 - 1; M_0]$;

$$[a_1;b_1] = \begin{cases} \left[a_0; \dfrac{a_0+b_0}{2}\right] & \text{si } \dfrac{a_0+b_0}{2} \text{ est majorant de } E \\ \left[\dfrac{a_0+b_0}{2}; b_0\right] & \text{sinon;} \end{cases}$$

... ;

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1};b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n; \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{si } \dfrac{a_n+b_n}{2} \text{ est majorant de } E \\ \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}; b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après l'axiome des segments emboîtés il existe un réel S qui appartient à tous les segments $[a_n;b_n]$. Remarquons d'abord que (par récurrence) la longueur de $[a_n;b_n]$ est $\ell_n = \dfrac{\ell_0}{2^n}$; et que d'après la construction qu'on a faite, a_n n'est pas majorant de E (par récurrence, puisque a_{n+1} vaut a_n, ou $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ s'il n'est pas majorant de E). Par contre b_n est majorant de E. On en déduit que $S - \ell_n$ n'est pas majorant de E et $S + \ell_n$ est majorant de E ($x \in E \Rightarrow x \leq b_n = a_n + \ell_n \leq S + \ell_n$).

Soit $x \in E$ et soit M un majorant de E. On a $x - S \leq \ell_n$ pour tout n (parce que $S+\ell_n$ majore E), et $S - M < \ell_n$ pour tout n (sinon $S-\ell_n$ majorerait E). On en déduit $\dfrac{x-S}{\ell_0} \leq \dfrac{1}{n}$ et (d'après le lemme) $\dfrac{x-S}{\ell_0} \leq 0$. On démontrerait

de même $\dfrac{S-M}{\ell_0} \leq 0$, on a donc finalement $x \leq S \leq M$ pour tout $x \in E$ et pour tout M majorant de E, c'est à dire S est la borne supérieure de E. $\diamond$

L'axiome d'Archimède permet aussi de définir la fonction "partie entière". Rappelons que par exemple la partie entière de $5,127$ est 5 ; que celle de $-3,127$ est -4 parce que $-3,127$ appartient à l'intervalle $[-4;-3[$. Le théorème suivant garantit l'existence de la partie entière de chaque nombre réel.

5.5 Théorème. *Il existe une application unique* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in [E(x); E(x)+1[.$$

Preuve. D'après l'axiome d'Archimède il existe deux entiers m et n tels que $-x < m$ et $x < n$, d'où $-m < x < n$. La réunion des intervalles

$$[-m;-m+1[, \quad [-m+1;-m+2[, \quad [-m+2;-m+3[, \quad \ldots, \quad [n-1;n[$$

est l'intervalle $[-m;n[$, qui contient x. Donc x appartient à un de ces intervalles c'est à dire il existe un entier k tel que $x \in [k;k+1[$ Cet entier est forcément unique (les intervalles $[k;k+1[$ étant disjoints pour $k \in \mathbb{Z}$) et on l'appelle $\mathrm{E}(x)$. $\diamond$

5.2 Exercices sur le chapitre 5

***Exercice* 5.1**
On sait que 1 est la borne supérieure de $]0;1[$, expliquer pourquoi c'est aussi la borne supérieure de $]0;1[\cap\mathbb{Q}$.

***Exercice* 5.2**
Soit E l'ensemble des $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ pour tout m et n dans $\mathbb{N}^*$. Quelles sont les bornes inférieure et supérieure de E ? Cet ensemble a-t-il un plus petit élément ou un plus grand élément ?

***Exercice* 5.3**
Soit F l'ensemble des $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que $1 < u_n < 1+\dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire $u_0 \leq u_n \leq u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer le plus petit et le plus grand élément de F.

***Exercice* 5.4**
Objectif : représentation décimale des nombres réels.

On dira qu'une suite d'entiers α est une écriture décimale du nombre réel positif ou nul x lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\alpha_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) x est la borne supérieure de l'ensemble $E(\alpha) = \left\{\alpha_0,\ \alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{10},\ \alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{10}+\dfrac{\alpha_2}{10^2},\ \ldots\right\}$, c'est à dire

$$x = \sup E(\alpha) \quad \text{avec} \quad E(\alpha) = \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{10^k} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\} ;$$

(iii) il n'existe pas d'entier N tel que $\forall n \geq N, \alpha_n = 9$.

a) Exemple : si $\alpha_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si α est une écriture décimale de x, calculer x sous forme d'une fraction.

b) Démontrer que pour toute suite d'entiers α vérifiant les conditions (1), (ii) et (iii), la borne supérieure de $E(\alpha)$ existe.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_0 = \mathrm{E}(x)$ et $\alpha_n = \mathrm{E}(10^n x) - 10\cdot\mathrm{E}(10^{n-1}x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{10^k} = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \in \left]x - \frac{1}{10^n}\ ;\ x\right]$$

et en déduire que α est une écriture décimale de x.

Chapitre 6

Suites et limites

6.1 Définition de la limite d'une suite

Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Les termes de la suite, c'est à dire les $u(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont en général notés u_n. Il arrive qu'une suite ne soit pas définie sur $\mathbb{N}$, mais sur $\mathbb{N} \setminus F$, où F est un ensemble fini d'entiers ; mais ce n'est pas important car on s'intéresse principalement à la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$:

6.1 ***Définition.*** *Nous dirons qu'une suite u de nombres réels converge vers une limite ℓ, ou qu'elle admet pour limite ℓ (sous-entendu, quand n tend vers $+\infty$), lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow (|u_n - \ell| < \varepsilon)$$

(notation : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$*).*

Ceci signifie qu'étant donné un réel strictement positif ε, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ sauf éventuellement les termes $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$. Exemple : soit la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$ et soit $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$; tous les x_n appartiennent à l'intervalle $\left]0 - \dfrac{1}{10}; 0 + \dfrac{1}{10}\right[$ sauf $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. On dit aussi : x_n appartient à l'intervalle $\left]0 - \dfrac{1}{10}; 0 + \dfrac{1}{10}\right[$ à partir du rang $n = 11$.

Quand une suite ne converge vers aucune limite réelle, elle est dite divergente. Par exemple les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = n$ sont divergentes. La première prend les valeurs -1 ou 1 suivant que n est pair ou impair, tandis que la seconde tend vers $+\infty$ au sens suivant :

6.2 ***Définition.*** *Nous dirons qu'une suite u de nombres réels a pour limite $+\infty$ lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq M$$

(notation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*).*

Nous dirons qu'une suite u *de nombres réels a pour limite* $-\infty$ *lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq M.$$

(notation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*).*

Pour démontrer que la limite de la suite $v_n = n$ est $+\infty$ on peut choisir $N = \mathrm{E}(M) + 1$ (partie entière de M plus 1), puisque pour $n \geq N$ on a $v_n = n \geq N > M$. Autre exemple : la limite de la suite $w_n = \sqrt{n}$ est $+\infty$, on peut prendre $N = \mathrm{E}\,(M^2) + 1$

6.2 Propriétés des limites

6.3 Théorème. *Soient* u *et* v *deux suites convergentes ; alors*
(i) $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$ *;*
(ii) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = (\lim_{n\to+\infty} u_n) \cdot (\lim_{n\to+\infty} v_n)$ *;*
(iii) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} u_n}{\lim_{n\to+\infty} v_n}$ *(si* $\lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0$*).*

Preuve. Démontrons par exemple l'assertion (ii). Si u converge vers une limite ℓ_1 et v vers une limite ℓ_2, alors (étant donné $\varepsilon > 0$) il existe N_1 tel que $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ (pour $n \geq N_1$) et N_2 tel que $|v_n - \ell_2| < \varepsilon$ (pour $n \geq N_2$). Il s'agit de majorer $|u_n v_n - \ell_1\ell_2|$, ou plus précisément de le majorer par une expression ne faisant intervenir que les termes $|u_n - \ell_1|$, $|v_n - \ell_2|$ et les constantes ℓ_1 et ℓ_2 :

$$\begin{aligned} u_n v_n - \ell_1\ell_2 &= (u_n - \ell_1)(v_n - \ell_2) + u_n\ell_2 + v_n\ell_1 - 2\ell_1\ell_2 \\ &= (u_n - \ell_1)(v_n - \ell_2) + (u_n - \ell_1)\ell_2 + (v_n - \ell_2)\ell_1 \end{aligned}$$

d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell_1\ell_2| &\leq |(u_n - \ell_1)(v_n - \ell_2)| + |(u_n - \ell_1)\ell_2| + |(v_n - \ell_2)\ell_1| \\ &\leq |u_n - \ell_1| \cdot |v_n - \ell_2| + |u_n - \ell_1| \cdot |\ell_2| + |v_n - \ell_2| \cdot |\ell_1| \\ &\leq \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot (|\ell_1| + |\ell_2|). \end{aligned}$$

Soit maintenant un autre réel positif ε_1. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon^2 \leq \dfrac{\varepsilon_1}{2}$ et $\varepsilon \cdot (|\ell_1| + |\ell_2|) \leq \dfrac{\varepsilon_1}{2}$, donc le calcul qu'on a fait prouve que

$$|u_n v_n - \ell_1\ell_2| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1.$$

pour tout $n \geq N$, où N vaut N_1 ou N_2 (le plus grand des deux). On a démontré que $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell_1\ell_2$. $\diamond$

Le théorème suivant concerne les limites infinies :

6.4 Théorème. *Soit une suite u telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(i) Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ *ou* $+\infty$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$;
(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$ *ou* $+\infty$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$;
(iii) Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell < 0$ *ou* $-\infty$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = -\infty$;
(iv) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

On a un théorème analogue dans le cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. On obtient aussi par ce théorème la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$ puisqu'on peut considérer ce quotient comme un produit : $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \dfrac{1}{v_n}$.
Une suite u est dite croissante lorsqu'elle vérifie l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; décroissante lorsque $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ces deux cas il est en général facile de savoir si la suite u converge, en utilisant le théorème suivant :

6.5 Théorème. *(i) Soit u une suite croissante. Si l'ensemble des u_n (noté $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$) est majoré, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\left(\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Si cet ensemble n'est pas majoré, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(ii) Soit u une suite décroissante. Si l'ensemble des u_n est minoré, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\left(\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Si cet ensemble n'est pas minoré, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve. Pour démontrer par exemple l'assertion (i) dans le cas où $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré :
soit un réel $\varepsilon > 0$, vérifions que u_n appartient (pour n assez grand) à l'intervalle $]S-\varepsilon; S+\varepsilon[$, où S est la borne supérieure de l'ensemble des u_n. Les termes de la suite ne peuvent pas être tous inférieurs ou égaux à $S-\varepsilon$: si c'était le cas, $S-\varepsilon$ serait un majorant de $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, ce qui contredit la définition de la borne supérieure. Il existe donc un terme u_N strictement supérieur à $S-\varepsilon$. Comme la suite u est croissante, on en déduit $u_n > S-\varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et, comte tenu que S lui-même est un majorant de l'ensemble des u_n,

$$u_n \in]S-\varepsilon; S] \subset]S-\varepsilon; S+\varepsilon[\quad \text{pour tout } n \geq N.$$

On a démontré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = S$.
Dans le cas où $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré, aucun réel M n'est majorant donc il existe un terme u_N strictement supérieur à M, d'où on déduit $u_n > M$ pour tout $n \geq N$, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. $\diamond$

6.3 Exercices sur le chapitre 6

***Exercice* 6.1**
Soit u la suite définie par

$$u_n = \frac{5n-3}{2n+1}.$$

À partir de quel rang N a-t-on $\left|u_n - \frac{5}{2}\right| < \frac{1}{10^{12}}$? L'écriture décimale de u_N commence-t-elle par $2,500000000000$ ou par $2,499999999999$?

***Exercice* 6.2**
Soit u une suite convergente et ℓ sa limite ; soit $\varepsilon > 0$.
a) Démontrer qu'à partir d'un certain rang N on a

$$\ell - \varepsilon + \frac{u_0 + \cdots + u_N - N(\ell-\varepsilon)}{n} < \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n} < \ell + \varepsilon + \frac{u_0 + \cdots + u_N - N(\ell+\varepsilon)}{n}.$$

b) Démontrer qu'à partir d'un certain rang N' (c'est à dire pour $n \geq N'$) on a

$$\ell - 2\varepsilon < \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n} < \ell + 2\varepsilon.$$

c) En déduire que la suite de terme général $\dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n}$ converge vers la même limite que u.

***Exercice* 6.3**
Déduire du théorème 6.3 que si une suite u converge et une suite v diverge, la suite $u+v$ diverge.

***Exercice* 6.4**
Vérifier que la suite de terme général $u_n = 2n+(-1)^n$ est croissante. Est-elle convergente ?

***Exercice* 6.5**
Soit u la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Après avoir démontré l'inégalité $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ par récurrence sur $n \geq 3$, en déduire que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{n(n+1)} < 1$, et que la suite u est strictement décroissante à partir du rang $n = 3$.
b) L'ensemble des u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-il un plus petit élément ou un plus grand élément ?

***Exercice* 6.6**
Déterminer le sens de variation, les bornes inférieure et supérieure des suites :
$x_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;
$y_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;
$z_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;
$r_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
$s_n = \frac{2^n}{n!}$;
$t_n = \frac{n!}{n^n}$;
(pour les deux dernières, le sens de variations s'obtient par simplification du rapport de deux termes consécutifs).

***Exercice* 6.7**
Démontrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

est croissante et majorée par $3 - \dfrac{1}{n!}$. Ceci permet-il de conclure qu'elle converge ?

***Exercice* 6.8**
Soient deux suites u et v telles que la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ soit croissante, et la suite de terme général v_n strictement positive. Démontrer que la suite de terme général $\dfrac{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n}$ est croissante.

Chapitre 7

Quelques propriétés des suites

7.1 Unicité de la limite

7.1 Théorème. *Soit u une suite convergente de réels. Il existe un seul réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Preuve. S'il existait deux réels distincts ℓ_1 et ℓ_2 qui soient limites de la suite u, alors le réel $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ serait strictement positif. Les termes de la suite vérifieraient $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang N (c'est à dire pour tout $n \geq N$). En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| = |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \\ &< 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

on obtient une contradiction avec l'égalité $|\ell_1 - \ell_2| = 2\varepsilon$. $\diamond$

7.2 Suites et inégalités

Remarquons d'abord qu'une suite convergente strictement positive, ne converge pas nécessairement vers un nombre strictement positif : par exemple chaque terme de la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est strictement positif mais sa limite est nulle. On dit alors que le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Par contre il conserve les inégalités larges :

7.2 Théorème. *Si deux suites convergentes u et v vérifient l'inégalité $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N (c'est à dire pour tout $n \geq N$), alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.*

Preuve. La suite de terme général $u_n - v_n$ converge d'après le théorème sur les sommes et produits de suites convergentes. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$. On

ne peut pas avoir $\ell > 0$: si c'était le cas, $u_n - v_n$ appartiendrait (à partir d'un certain rang) à tout intervalle centré en ℓ, par exemple à l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right[$, d'où $u_n - v_n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $u_n \leq v_n$.
On a donc $\ell \leq 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ◇

Le corollaire suivant est un cas particulier de ce théorème : le cas où la suite v est constante.

7.3 Corollaire. *Si une suite convergente u vérifie $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, avec M réel indépendant de n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$.*

Le théorème suivant (appelé "théorème des gendarmes") est un peu différent. On l'utilise pour démontrer par encadrement qu'une suite est convergente.

7.4 Théorème. *Soient trois suites u, v et w. On suppose que u et w convergent vers la même limite ℓ, et que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Alors la suite v converge aussi vers ℓ.*

Preuve. Étant donné $\varepsilon > 0$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ à partir d'un rang N_1 , et les termes w_n appartiennent au même intervalle à partir d'un rang N_2 . Comme $u_n \leq v_n \leq w_n$, on en déduit que v_n appartient à cet intervalle à partir du rang $\max(\{N_1, N_2\})$, ce qui équivaut à $|v_n - \ell| < \varepsilon$. La suite v converge donc vers ℓ. ◇

7.3 Suites extraites

Soit u une suite de réels ; on appelle suite extraite de u toute suite obtenue en choisissant certains termes de la suite u. La suite extraite la plus couramment utilisée est la suite de terme général u_{2n} : ses termes sont $u_0, u_2, u_4, \ldots$. La définition rigoureuse est la suivante :

7.5 *Définition.* *On dit qu'une suite v est extraite d'une suite u (ou que v est une sous-suite de u) lorsqu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout n.*

7.6 Théorème. *Si une suite u converge vers une limite ℓ, toute suite extraite de u converge vers ℓ.*

Preuve. Si u converge vers ℓ, étant donné $\varepsilon > 0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$ à partir d'un rang N. Démontrons que la suite extraite de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ vérifie aussi cette condition. Pour tout $n \geq N$ on a $\varphi(n) \geq n \geq N$ (l'inégalité $\varphi(n) \geq n$ se démontrant facilement par récurrence, en utilisant le fait que l'application φ est strictement croissante). De l'inégalité $\varphi(n) \geq N$ on déduit $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ c'est à dire $|v_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que v converge vers ℓ.
◇

Réciproquement que se passe-t-il quand certaines suites extraites d'une suite u convergent ? Le théorème suivant donne une réponse dans un cas particulier :

7.7 Théorème. *Soit u une suite de réels, supposons que la suite de terme général u_{2n} converge vers une limite ℓ_1 , et que la suite de terme général u_{2n+1} converge vers une limite ℓ_2 .*
(i) Si $\ell_1 = \ell_2$, alors u est convergente.
(ii) Si $\ell_1 \neq \ell_2$, alors u est divergente.

Preuve. (i) Si $\ell_1 = \ell_2$, étant donné $\varepsilon > 0$ les termes u_{2n} appartiennent à l'intervalle $]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ pour $n \geq N_1$, et les termes u_{2n+1} appartiennent au même intervalle pour $n \geq N_2$. Ce qui revient à dire que u_m appartient à cet intervalle pour tout entier pair $m \geq 2N_1$ et pour tout entier impair $m \geq 2N_2 + 1$. En appelant N le plus grand des deux (c'est à dire $N = 2N_1$ ou $2N_2 + 1$), on a bien $u_m \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ pour tout $m \geq N$.
(ii) Si $\ell_1 \neq \ell_2$, la suite u est divergente : si elle convergeait, ℓ_1 et ℓ_2 (qui sont limites de suites extraites de u) seraient égaux à la limite de u d'après le théorème précédent. ◇

7.4 Suites adjacentes

7.8 *Définition.* *On dit que deux suites u et v sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les trois conditions suivantes :*
u est croissante et v décroissante ;
$u_n \leq v_n$ pour tout n ;
$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$

7.9 Théorème. *Si u et v sont deux suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.*

Preuve. La suite u vérifie l'inégalité $u_0 \leq u_n$ pour tout n (parce qu'elle est croissante), et de même la suite décroissante v vérifie $v_0 \geq v_n$ pour tout n. On a supposé $u_n \leq v_n$, donc $u_n \leq v_n \leq v_0$ ce qui prouve que la suite u est majorée par une constante (v_0 est constant, c'est à dire ne dépend pas de n). Pour la même raison, la suite v est minorée par la constante u_0. Donc les suites u et v convergent (en utilisant le théorème des suites monotones, chapitre 6). Elle convergent vers la même limite puisqu'on a supposé $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
◇

L'exemple le plus naturel de suites adjacentes est celui des approximations décimales d'un réel, par défaut et par excès : par exemple soit le réel $\frac{1}{3}$, de développement décimal $0,33333333333\ldots$ avec une infinité de 3. Les

approximations par défaut définissent une suite croissante : $u_0 = 0$, $u_1 = 0,3$, $u_2 = 0,33$, ... , $u_n = 0,33\ldots3$ (avec n fois le chiffre 3). Les approximations par excès définissent une suite décroissante : $v_0 = 1$, $v_1 = 0,4$, $v_2 = 0,34$, ... , $v_n = 0,33\ldots4$ (avec $n-1$ fois le chiffre 3 et une fois le chiffre 4). On a $u_n < \dfrac{1}{3} < v_n$ pour tout n, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$.

7.5 Méthodes pratiques de calcul des limites

• Prenons un premier exemple : la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^3-1}$ est le quotient de deux suites, qui ont toutes deux une limite infinie ; on ne peut donc pas appliquer le théorème sur la limite d'un quotient. On dit qu'on a la forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Mettons alors en facteur les "parties principales", c'est à dire le plus grand terme du numérateur et le plus grand terme du dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} \ . \end{aligned}$$

Il est clair alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\cdot\dfrac{1+0}{1-0} = 0$; on dit qu'on a levé l'indétermination.

La même méthode appliquée à la suite $v_n = \dfrac{n+\ln n}{n-e^n}$ donnerait

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)}{-e^n\left(1-\frac{n}{e^n}\right)} \\ &= \frac{n}{-e^n}\cdot\frac{1+\frac{\ln n}{n}}{1-\frac{n}{e^n}} \end{aligned}$$

et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, sachant que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances, et que les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme.

• La méthode des conjugués consiste, quand on a une suite u définie par une expression de la forme $u_n = \sqrt{v_n} - \sqrt{w_n}$, à la multiplier et la diviser par $\sqrt{v_n}+\sqrt{w_n}$. Par exemple, la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ vérifie

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ . \end{aligned}$$

Le numérateur vaut 1 et le dénominateur a une limite infinie quand $n \to +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La même méthode appliquée à la suite $v_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$ donnerait

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} \,. \end{aligned}$$

On simplifie le numérateur et on met en facteur la partie principale du dénominateur :

$$v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \,.$$

Après avoir simplifié par n, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$.

7.6 Exercices sur le chapitre 7

***Exercice* 7.1**
a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$. Après avoir constaté que $n = (1 + x_n)^n$, appliquer la formule du binôme et en déduire l'inégalité

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2.$$

b) En déduire une majoration de x_n , puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et celle de $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

***Exercice* 7.2**
Soit u la suite définie par $u_n = \sin(n\alpha)$, où α est un réel fixé non multiple de π. On suppose que u converge vers une limite ℓ.

a) On pose $v_n = \cos(n\alpha)$. Trouver une relation entre u_{n+1} , u_n et v_n , puis en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

b) Trouver une relation entre u_{n-1} , u_n et v_n et en déduire une autre valeur pour $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

c) En comparant ces deux valeurs, démontrer que les suites u et v convergent toutes deux vers 0.

d) Compte tenu que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, trouver une contradiction et conclure.

***Exercice* 7.3**
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n + \cos n}{2n + \sin n}$.

***Exercice* 7.4**
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où a et b sont deux constantes strictement positives.

***Exercice* 7.5**
Soient u et v deux suites à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, de limite nulle. Peut-on en déduire la limite de $\dfrac{(u_n)^2 + (v_n)^2}{u_n + v_n}$? Et celle de $\dfrac{u_n + (v_n)^2}{(u_n)^2 + v_n}$?

***Exercice* 7.6**
On considère la suite u de terme général $u_n = \sqrt{\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^k} - \sqrt{n^k}$, où $k \in \mathbf{N}$ est fixé.

a) Calculer sa limite quand la constante k vaut 0, 1 ou 2.

b) En utilisant la méthode des conjugués et la formule du binôme, démontrer que la limite de u est nulle ou infinie sauf si $k = 4$.

Chapitre 8

Séries

8.1 Notion de série

8.1 ***Définition.*** *Soit u une suite de réels. On appelle "série de terme général u_n" la suite S définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

Dans cette définition, le symbole $\sum_{k=0}^{n}$ est à remplacer par $\sum_{k=n_0}^{n}$ si la suite u n'est définie qu'à partir du rang n_0 .
On dit que la série de terme général u_n converge vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$, lorsque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$.

Par exemple on appelle "série géométrique de raison r" la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^n$ (alors que la "suite géométrique de raison r" est la suite de terme général $u_n = r^n$). On verra en exercice que la série géométrique converge si et seulement si la constante r est strictement comprise entre -1 et 1, et la suite géométrique converge si et seulement si $-1 < r \leq 1$.
Un autre exemple classique est la série de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

où α est une constante réelle donnée (rappelons que $k^\alpha = e^{\alpha \ln k}$).

8.2 Théorème. *Pour toute suite u à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, la série de terme général u_n est croissante.*

Preuve. La série de terme général u_n est la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Elle est croissante parce que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ pour tout n. $\diamond$

En conséquence de ce théorème et du théorème des suites monotones, toute série à termes positifs ou nuls converge (vers une limite ℓ finie) ou a pour limite $+\infty$.

8.2 Comparaison de séries et intégrales

Nous utiliserons cette méthode d'étude des séries uniquement dans le cas de la série de Riemann. La limite de cette série (quand elle est convergente) n'est connue que si α est un entier pair strictement positif (voir http ://fr.wikipedia.org/wiki/Série_de_Riemann). Par contre on sait intégrer la fonction $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$: si $\alpha \neq 1$ on a

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right). \tag{8.1}$$

Cette intégrale va servir à démontrer le théorème suivant :

8.3 Théorème. *La série de Riemann, définie par* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ *, converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Preuve. On appelle I_n l'intégrale calculée en (8.1). On a

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + \dots u_n \ , \quad \text{où } u_k = \frac{1}{k^\alpha} \ ; \\ I_n &= v_2 + \dots v_n \ , \quad \text{avec } v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} \ . \end{aligned}$$

Remarquons que $v_k \geq u_k$ puisque

$$\forall x \leq k, \quad x^\alpha \leq k^\alpha \ \Rightarrow \ \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}\int_{k-1}^{k} dx = \frac{1}{k^\alpha} \ .$$

On en déduit $v_2 + \dots + v_n \geq u_2 + \dots + u_n$ et par conséquent

$$S_n \leq u_1 + I_n$$

et, en utilisant (8.1),

$$S_n \leq u_1 + \frac{1}{\alpha - 1} \ .$$

La suite de terme général S_n est croissante et majorée par une constante, donc elle converge d'après le théorème des suites monotones.
Supposons maintenant $\alpha \leq 1$; il faut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. L'inégalité $\alpha \leq 1$ implique $k^\alpha \leq k$ donc $u_k = \dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{k}$. Il ne reste plus qu'à minorer (par la même méthode que précédemment) $\dfrac{1}{k}$ par $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, d'où

$$S_n = u_1 + \dots u_n \geq \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ on en déduit $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. $\diamond$

8.3 Exercices sur le chapitre 8

***Exercice* 8.1**

a) Indiquer, suivant la valeur de r, si la suite géométrique de terme général $u_n = r^n$ est bornée, monotone, convergente, a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. Dans le cas où elle est convergente, donner la valeur de sa limite.

$u_n = r^n$	u bornée	u croissante ou décroissante	u convergente	$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$r < -1$					
$r = -1$					
$-1 < r < 0$					
$0 \leq r < 1$					
$r = 1$					
$r > 1$					

b) Indiquer, suivant la valeur de r, si la série géométrique de terme général $u_n = r^n$ est bornée, monotone, convergente, a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. Dans le cas où elle est convergente, donner la valeur de sa limite.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$	S bornée	S croissante ou décroissante	S convergente	$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$	$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$
$r < -1$					
$r = -1$					
$-1 < r < 0$					
$0 \leq r < 1$					
$r = 1$					
$r > 1$					

***Exercice* 8.2**

On considère la série S définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Vérifier pour tout entier $k \geq 2$ l'encadrement $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) Pour $N \in \mathbf{N}^*$ donné, en déduire $S_N + \frac{1}{N+1} \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq S_N + \frac{1}{N}$ *(Indication : pour tout* $n > N$ *on a* $S_n - S_N = \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2}$*).*

***Exercice* 8.3**

Soit S la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Démontrer que les suites de terme général S_n et $S_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.

b) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. Démontrer que $(q-1)!p$ est un entier strictement compris entre les entiers $q!S_q$ et $q!S_q + 1$, puis trouver une contradiction.

***Exercice* 8.4**

a) Par une méthode analogue à la démonstration du théorème 8.3, démontrer que la suite

de terme général

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

converge vers $\ln 2$.

b) On considère la série S définie par

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ .$$

Démontrer que les suites de terme général S_{2n} et S_{2n-1} sont adjacentes.

c) Après avoir vérifié que $S_{2n} = u_n$, en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Chapitre 9

Suites équivalentes. Vitesse de convergence

9.1 Suites équivalentes

Deux suites de réels u et v, telles que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, sont dites équivalentes lorsque la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1. On utilisera la notation suivante :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

En général quand on demande de trouver un équivalent à une suite u donnée, il s'agit de trouver la suite la plus simple qui soit équivalente à u. Remarquons que :

• Une suite définie sous la forme d'une somme est équivalente à sa partie principale ; par exemple, la suite définie par $u_n = e^n + 2n + \ln n$ est équivalente à $v_n = e^n$ (parce que $\dfrac{2n}{e^n}$ et $\dfrac{\ln n}{e^n}$ tendent vers 0 et par conséquent $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 1).

• D'autre part, toutes les suites qui convergent vers une même limite non nulle ℓ sont équivalentes entre elles puisque leur rapport tend vers $\dfrac{\ell}{\ell} = 1$. Elles sont équivalentes à la suite constante $v_n = \ell$. Par contre si la limite de u vaut 0, $-\infty$ ou $+\infty$, la recherche d'une suite équivalente à u apporte une information supplémentaire par rapport à la connaissance de cette limite.

• Supposons $x_n \sim a_n$ et $y_n \sim b_n$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n y_n}{a_n b_n} = 1$, c'est à dire $x_n y_n \sim a_n b_n$. On vérifie de même que $\dfrac{x_n}{y_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$ (si y_n et b_n sont différents de 0 à partir d'un certain rang). Par contre on n'a pas toujours $x_n + y_n \sim a_n + b_n$ (par exemple si x_n a pour partie principale a_n et si y_n a pour partie principale $b_n = -a_n$, on ne peut pas écrire $x_n + y_n \sim a_n + b_n$ puisque $a_n + b_n = 0$).

Donnons encore un exemple, et une propriété des suites équivalentes :

9.1 Théorème. *(i) La suite de terme général*

$$u_n = \frac{a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_\delta n^\delta + b_{\delta-1} n^{\delta-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

(quotient d'un polynôme de degré d par un polynôme de degré δ) est équivalente à la suite de terme général $\dfrac{a_d}{b_\delta} \cdot n^{d-\delta}$.

(ii) Si deux suites x et y sont équivalentes et si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, $-\infty$ *ou* $+\infty$, *alors* $\ln|x_n| \sim \ln|y_n|$.

Preuve.(i) Comme le polynôme $P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ est supposé de degré d, le coefficient a_d n'est pas nul ; on peut donc écrire pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$\frac{P(n)}{a_d n^d} = 1 + \frac{a_{d-1}}{a_d} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_d} \cdot \frac{1}{n^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d} \cdot \frac{1}{n^d}$$

et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{a_d n^d} = 1$ et $P(n) \sim a_d n^d$. De même, le polynôme $Q(n) = b_\delta n^\delta + b_{\delta-1} n^{\delta-1} + \cdots + b_1 n + b_0$ est équivalent à $b_\delta n^\delta$, donc $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ est équivalent à $\dfrac{a_d n^d}{b_\delta n^\delta} = \dfrac{a_d}{b_\delta} \cdot n^{d-\delta}$.

(ii) On a $\dfrac{\ln|x_n|}{\ln|y_n|} - 1 = \dfrac{\ln|x_n| - \ln|y_n|}{\ln|y_n|} = \dfrac{1}{\ln|y_n|} \cdot \ln\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|$ et, d'après les hypothèses, la limite de $\dfrac{1}{\ln|y_n|}$ est nulle comme celle de $\ln\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln|x_n|}{\ln|y_n|} - 1 \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln|y_n|} \cdot \ln\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \right) = 0,$$

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln|x_n|}{\ln|y_n|} = 1$ et $\ln|x_n| \sim \ln|y_n|$. $\diamond$

9.2 Vitesse de convergence

On sait que la suite géométrique, définie par $a_n = r^n$, converge vers 0 dans le cas $|r| < 1$, et qu'elle converge plus rapidement que la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$), c'est à dire la limite du rapport $\dfrac{a_n}{b_n}$ est nulle. Par exemple les suites définies par $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ valent, pour $n = 50$, $a_{50} \simeq 0,0000000000000009$ et $b_{50} \simeq 0,0004$. Ces suites, c'est à dire les suites de terme général r^n et $\dfrac{1}{n^\alpha}$, peuvent servir de référence pour mesurer la vitesse de convergence d'une suite convergente quelconque :

9.2 *Définition.* *Soit u une suite convergente, et ℓ sa limite. On dira que la vitesse de convergence de cette suite est géométrique, ou exponentielle, lorsqu'on a (au moins pour tout n assez grand)*

$$\exists C, C' \in \mathbf{R}_+^*,\ r, r' \in]0,1[,\ Cr^n \leq |u_n - \ell| \leq C'r'^n.$$

On dira que sa vitesse de convergence est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$) lorsqu'on a (au moins pour tout n assez grand)

$$\exists C, C' \in \mathbf{R}_+^*,\ \frac{C}{n^\alpha} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{C'}{n^\alpha}.$$

Quelques variantes : on dira que la vitesse de convergence de la suite u est au moins géométrique lorsqu'on arrive seulement à trouver $C \in \mathbf{R}_+^*$ et $r \in]0,1[$ tels que $|u_n - \ell| \leq Cr^n$ (pour n assez grand). Et on dira qu'elle converge plus rapidement que les suites géométriques lorsque, quelque soit $r \in]0,1[$, l'inégalité $|u_n - \ell| \leq r^n$ est vérifiée (pour n assez grand).

Quant aux méthodes utilisées pour déterminer la vitesse de convergence, considérons d'abord deux exemples simples : la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et la suite de terme général $v_n = \dfrac{10^n}{10^n + 1}$. La première vérifie $|u_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$. On a $n+1 \geq n$ et (si $n \in \mathbf{N}^*$) $n+1 \leq n+n = 2n$ d'où

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \leq |u_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui prouve que la suite u converge vers 1 avec une vitesse de l'ordre de $\dfrac{1}{n}$.

Remplaçons maintenant n par 10^n dans ces inégalités ; on obtient

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \leq |v_n - 1| \leq \frac{1}{10^n},$$

la vitesse de convergence de v vers 1 est donc géométrique.

Précisons quel est le lien entre cette notion et celle de suites équivalentes :

9.3 Théorème. *Soit u une suite convergeant vers 0.*
(i) S'il existe $C, r \in \mathbf{R}^*$, avec $|r| < 1$, tels que $u_n \sim Cr^n$, la vitesse de convergence de la suite u est géométrique.
(ii) S'il existe $C \in \mathbf{R}^*$ et $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^\alpha}$, la vitesse de convergence de la suite u est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Preuve. Quand une suite u est équivalente à une suite v, on a (d'après la définition de la limite) pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{(pour } n \text{ assez grand).}$$

Si $v_n > 0$ on en déduit $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$; et si $v_n < 0$, c'est $(1-\varepsilon)v_n \geq u_n \geq (1+\varepsilon)v_n$. Choisissons ε dans l'intervalle $]0,1[$, de façon que $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ soient strictement positifs. Ceci prouve l'item (i) (en remplaçant v_n par Cr^n) et l'item (ii) (en remplaçant v_n par $\dfrac{C}{n^\alpha}$). $\diamond$

Voir aussi les définitions de la vitesse de convergence sur le site :
http ://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=affiche&quoi=./v/vitesseconv.html

9.3 Exercices sur le chapitre 9

***Exercice* 9.1**
On considère une fonction polynôme non nulle $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Démontrer que les suites de terme général $u_n = \ln|P(n)|$ et $v_n = \ln\left|a_d n^d\right|$ sont équivalentes.

Les suites de terme général $x_n = e^{P(n)}$ et $y_n = e^{a_d n^d}$ sont-elles équivalentes ?

***Exercice* 9.2**
Quel est l'équivalent le plus simple de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

Celui de la suite de terme général $v_n = \dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^3+1)}$?

***Exercice* 9.3**
Déterminer la vitesse de convergence de la suite de terme général $v_n = \dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^3+1)}$ et celle de la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n}\ln(e^n+1)$.

***Exercice* 9.4**
Soit $r \in]-1,1[$, démontrer que la vitesse de convergence de la série géométrique, définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^n$, est géométrique.

***Exercice* 9.5**
On considère la série S définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$. On sait qu'elle converge vers une limite ℓ ; quelle est sa vitesse de convergence ?
(indication : on pourra se servir de l'encadrement trouvé à l'exercice 8.2)

***Exercice* 9.6**
Soit S la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. On sait qu'elle converge vers une limite ℓ ; démontrer que sa vitesse de convergence est de l'ordre de $\dfrac{1}{(n+1)!}$ *(Indication : il s'agit de trouver deux constantes $C, C' \in \mathbf{R}_+^*$ telles que $\dfrac{C}{(n+1)!} \leq |S_n - \ell| \leq \dfrac{C'}{(n+1)!}$; on pourra pour cela utiliser les suites adjacentes de terme général S_n et $S_n + \dfrac{2}{(n+1)!}$).*

Chapitre 10

Suites définies par relation de récurrence

10.1 Deux façons de définir une suite

Pour définir une suite u il faut donner la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. On peut la donner sous la forme $u_n = f(n)$ (c'est à dire donner u_n en fonction de n) mais aussi sous la forme $u_{n+1} = g(u_n)$. Dans ce dernier cas il faut aussi donner la valeur de u_0 (ou de u_{n_0} si la suite u est définie à partir du rang n_0), et vérifier que tous les u_n appartiennent au domaine de définition de la fonction g.

Pour donner des exemples simples, les deux suites (décroissantes) de terme général $u_n = -n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ sont définies sous la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction (décroissante aussi). Mais la première suite peut être aussi définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N},$$

et la deuxième par

$$v_1 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

Remarquons que les fonctions qu'on a utilisé pour définir u et v par récurrence, c'est à dire les fonctions $g(x) = x - 1$ et $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$, sont croissantes alors que u et v sont décroissantes.

10.1 Théorème. *(i) Si f est une fonction croissante, la suite de terme général $u_n = f(n)$ est croissante.*
(ii) Si g est une fonction décroissante, la suite de terme général $v_n = g(n)$ est décroissante.
(iii) Si h est une fonction croissante, les suites w telles que $w_{n+1} = h(w_n)$ pour tout n sont croissantes si $w_1 \geq w_0$ et décroissantes si $w_1 \leq w_0$.

Preuve. (i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $n+1 \geq n$ donc $f(n+1) \geq f(n)$ c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$.
(ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $n+1 \geq n$ donc $g(n+1) \leq g(n)$ c'est à dire $v_{n+1} \leq v_n$.
(iii) Si $w_1 \geq w_0$, on peut dire que l'inégalité $w_{n+1} \geq w_n$ est vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $w_{n+1} \geq w_n$. Comme la fonction h est croissante, on en déduit $h(w_{n+1}) \geq h(w_n)$ c'est à dire $w_{n+2} \geq w_{n+1}$. Ceci prouve par récurrence que l'inégalité $w_{n+1} \geq w_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, c'est à dire la suite w est croissante.

Si $w_1 \leq w_0$, on peut dire que l'inégalité $w_{n+1} \leq w_n$ est vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $w_{n+1} \leq w_n$. Comme la fonction h est croissante, on en déduit $h(w_{n+1}) \leq h(w_n)$ c'est à dire $w_{n+2} \leq w_{n+1}$. Ceci prouve par récurrence que l'inégalité $w_{n+1} \leq w_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, c'est à dire la suite w est décroissante. $\diamond$

Il n'y a pas de théorème analogue pour les suites définies par relation de récurrence à partir d'une fonction décroissante.

10.2 Suites définies au moyen d'une fonction lipschitzienne

Définissons d'abord ce qu'est une fonction lipschitzienne :

10.2 *Définition.* *Une application $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est dite lipschitzienne de rapport λ lorsque*

$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

Le cas qui nous intéresse, c'est quand la fonctions lipschitzienne est à valeurs dans $[a,b]$ car cela permet de définir une suite u en donnant la valeur de $u_0 \in [a,b]$ et en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

10.3 Théorème. *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$, et u une suite définie par*

$$u_0 \in [a,b] \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \textit{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Alors la suite u converge et sa vitesse de convergence est au moins géométrique.

Pour pouvoir démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

10.4 Lemme. *Toute application lipschitzienne $f : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe, c'est à dire il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.*

Preuve. L'ensemble E des $x \in [a,b]$ tels que $f(x) \geq x$ n'est pas vide, puisqu'on a $f(a) \geq a$ du fait même que f est à valeurs dans $[a,b]$. Soit $\alpha = \sup E$. Comme f est lipschitzienne on a, pour tout $h \in \mathbf{R}^+$ tel que $\alpha - h$ et $\alpha + h$ appartiennent à $[a,b]$,

$$|f(\alpha - h) - f(\alpha)| \leq \lambda h \quad \text{et} \quad |f(\alpha + h) - f(\alpha)| \leq \lambda h$$

c'est à dire

$$-\lambda h \leq f(\alpha - h) - f(\alpha) \leq \lambda h \quad \text{et} \quad -\lambda h \leq f(\alpha + h) - f(\alpha) \leq \lambda h.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\alpha - h$ strictement compris entre $\alpha - \varepsilon$ et α, tel que $\alpha - h \in E$ (sinon $\alpha - \varepsilon$ serait un majorant de E, et α ne serait pas le plus petit des majorants). Par contre $\alpha + h$ n'appartient pas à E puisque α majore les éléments de E. On a donc

$$\alpha - h \in E \Rightarrow f(\alpha - h) \geq \alpha - h \quad \text{et} \quad \alpha + h \notin E \Rightarrow f(\alpha + h) < \alpha + h$$

et, en combinant avec les inégalités précédentes, on en déduit

$$f(\alpha) \leq \lambda h + f(\alpha + h) < \lambda h + \alpha + h \quad \text{et} \quad f(\alpha) \geq -\lambda h + f(\alpha - h) \geq -\lambda h + \alpha - h$$

ce qui, compte tenu que $\lambda \geq 0$, équivaut à

$$\frac{f(\alpha) - \alpha}{\lambda + 1} < h \quad \text{et} \quad \frac{f(\alpha) - \alpha}{\lambda + 1} \geq -h.$$

Rappelons que $h < \varepsilon$. On a donc obtenu que $\dfrac{f(\alpha) - \alpha}{\lambda + 1}$ est plus petit que tous les réels strictement positifs ε et qu'il est plus grand que tous les réels strictement négatifs $-\varepsilon$; par conséquent il est nul et $f(\alpha) = \alpha$. $\diamond$

Preuve. (du théorème) Soit α le point fixe de la fonction f. Démontrons par récurrence l'inégalité $|u_n - \alpha| \leq (b-a)\lambda^n$.

Elle est vraie pour $n = 0$ parce que, u_0 et α appartenant à l'intervalle $[a,b]$, leur différence vaut au moins $a - b$ et au plus $b - a$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq (b-a)\lambda^n$. En remplaçant x par u_n et y par α dans l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ on obtient

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \lambda |u_n - \alpha|.$$

Compte tenu que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ on en déduit

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \lambda |u_n - \alpha| \leq (b-a)\lambda^{n+1}.$$

On a donc démontré $|u_n - \alpha| \leq (b-a)\lambda^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui prouve que la suite u converge vers α et que sa vitesse de convergence est au moins géométrique. $\diamond$

Dans le théorème suivant l'hypothèse "f lipschitzienne" est remplacée par une hypothèse plus faible, qui porte sur la dérivée de f.

10.5 Théorème. *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, dérivable au moins en un point $x_0 \in]a, b[$, pour lequel on a $f(x_0) = x_0$ et $|f'(x_0)| < 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute suite u définie par*

$$u_0 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers x_0 avec une vitesse de convergence au moins géométrique. Elle converge plus rapidement que les suites géométriques si $f'(x_0) = 0$.

Preuve. Comme $|f'(x_0)|$ est strictement plus petit que 1, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $|f'(x_0) - \varepsilon'|$ et $|f'(x_0) + \varepsilon'|$ soient aussi strictement plus petits que 1. Soit λ le plus grand de ces deux réels. Par définition de la dérivée, $f'(x_0)$ est la limite de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0, et par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\text{si } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon \text{ alors } f'(x_0) - \varepsilon' \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) + \varepsilon'.$$

On en déduit $-\lambda \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lambda$, d'où

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \lambda |x - x_0|.$$

À partir de cette inégalité, la même démonstration que dans le théorème précédent permet d'obtenir $|u_n - x_0| \leq \varepsilon \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. ⋄

Il n'y a pas de théorème de convergence dans le cas $|f'(x_0)| = 1$; cependant, à supposer que la suite u converge quand même vers x_0, on peut s'attendre à ce que cette convergence soit "lente" c'est à dire de l'ordre de $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

Voir aussi les sites :

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Point_fixe

http ://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=affiche&quoi=./p/pointfixe.html

http ://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=affiche&quoi=./l/lipschitzienne.html

10.3 Méthode de Newton

La méthode de Newton a pour but de calculer des valeurs approchées de la solution d'une équation $f(x) = 0$. Elle consiste à choisir un réel u_0 dans l'ensemble de définition de la fonction f, et à définir une suite u par récurrence en posant

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}. \tag{1}$$

Il y a bien sûr des conditions sur la fonction f, que nous ne détaillerons pas, pour que cette suite existe. Supposons que la suite u converge vers une

limite ℓ. Alors, si les fonctions f et f' sont continues et si $f'(\ell) \neq 0$, la relation (1) implique par passage à la limite

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

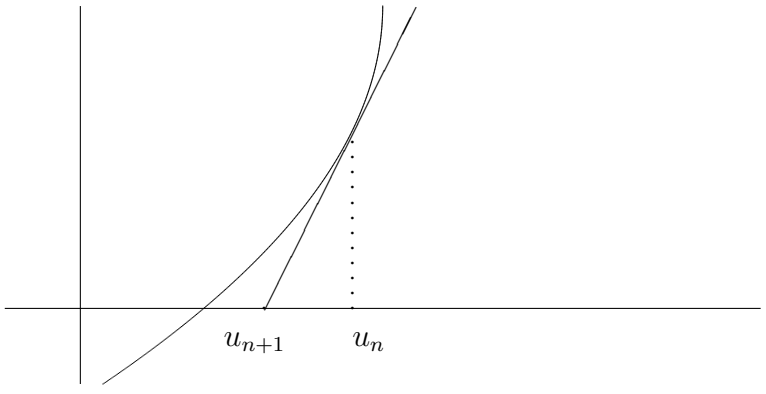
d'où on déduit $f(\ell) = 0$: ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = 0$, et les u_n sont des valeurs approchées de cette solution.

Remarquons que d'après (1) la suite u est définie par une formule de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est la fonction définie par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Un calcul rapide permet de s'apercevoir que $g'(\ell) = 0$; on est donc dans les conditions d'application du théorème 10.5 et la suite u converge plus rapidement que les suites géométriques : c'est la raison pour laquelle on l'a définie par une relation de récurrence compliquée, alors que si on avait posé simplement $u_{n+1} = u_n + f(u_n)$ on aurait aussi obtenu une suite qui converge vers la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Terminons par une interprétation géométrique de la méthode de Newton : traçons la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n ; alors u_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe des x. Pour le vérifier, il suffit d'utiliser l'équation de la tangente au point d'abscisse u_n c'est à dire l'équation $y = f'(u_n)(x-u_n)+f(u_n)$, puis de déterminer le réel x pour lequel $y = 0$.



Voir aussi les sites :

http ://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=affiche&quoi=./n/newton_meth.html
http ://villemin.gerard.free.fr/Calcul/Newton.htm

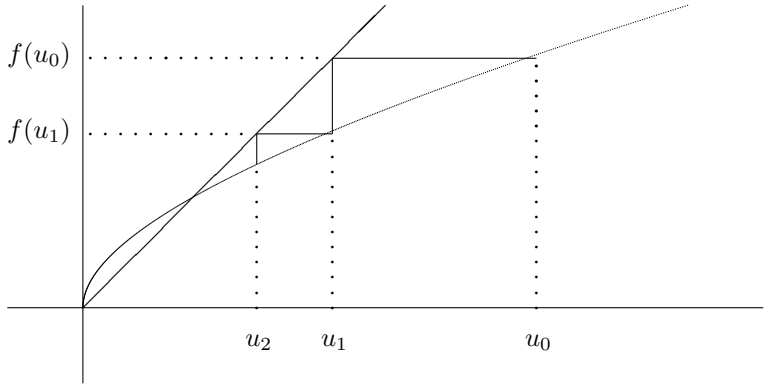
10.4 Exercices sur le chapitre 10

***Exercice* 10.1**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$, et u la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Les points de coordonnées $(u_{n+1}, f(u_n))$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ sont donc sur la bissectrice comme il est représenté sur le dessin ci- dessous.

a) Démontrer par récurrence les inégalités $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$.

b) Démontrer par récurrence les inégalités $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq u_n - 1 \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *(indication : on peut utiliser la méthode des conjugués).*

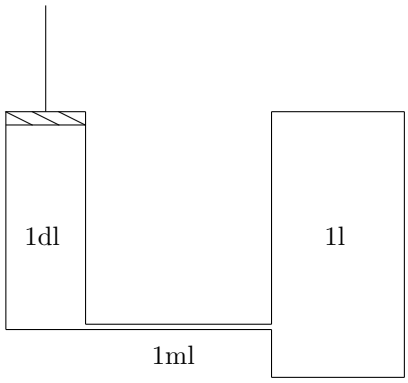
c) En déduire que la suite u converge vers 1 et que sa vitesse de convergence est géométrique.



***Exercice* 10.2**
a) Faire un dessin analogue à celui de l'exercice précédent pour la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$ et la suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b) Démontrer par récurrence les inégalités $\frac{n-1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n}{n+1}$ et en déduire la limite et la vitesse de convergence de la suite v.

***Exercice* 10.3**
Une pompe de 1 décilitre est reliée à une chambre à air de 1 litre par un tuyau de 1 millilitre.



Un calcul simple permet de dire qu'après n coups de pompe, la pression P_n dans la chambre à air vérifie la relation

$$P_n = \frac{1000}{1001} P_{n-1} + \frac{101}{1001} P_0.$$

1) Démontrer que la suite de terme général P_n converge vers une limite L.

2) À partir de quand la pression est-elle supérieure à $\dfrac{L}{10}$ (avec $P_0 = 1$ atmosphère) ?

***Exercice* 10.4**

On veut obtenir une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ par la méthode de Newton. On définit donc une suite par récurrence en posant

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

où la fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x}$ (c'est une des fonctions qui s'annule en $x = \sqrt[3]{2}$).

a) Démontrer la relation $u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^4 + 4u_n}{2{u_n}^3 + 2}$.

b) Démontrer les inégalités $0 \leq u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \left(u_n - \sqrt[3]{2}\right)^3$ *(indication : mettre en facteur* $\left(u_n - \sqrt[3]{2}\right)^3$ *dans le numérateur de* $\dfrac{{u_n}^4 + 4u_n}{2{u_n}^3 + 2} - \sqrt[3]{2}$*).*

c) En déduire une valeur de n pour laquelle $\left|u_n - \sqrt[3]{2}\right| \leq 10^{-20}$.

***Exercice* 10.5**

On considère les trois suites définies par :

$$u_n = \frac{5n+3}{2n+1}, \quad v_n = 2 - \frac{2}{2^n - 2}, \quad w_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Trouver laquelle des trois vérifie chacune des relations de récurrence :

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}, \quad y_{n+1} = \frac{11y_n - 25}{4y_n - 9}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n - 6}{z_n - 4}.$$

***Exercice* 10.6**

La suite u est définie par

$$u_0 = \frac{2251}{729} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{6}{5 - u_n}.$$

a) Démontrer que la suite de terme général $\dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$ est égale à une suite géométrique v, qu'on calculera.

b) Démontrer qu'il existe un seul entier n_0 tel que u_{n_0} soit négatif et que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

c) En déduire que la suite u est convergente.

d) Démontrer (en utilisant les théorèmes sur les limites) que sa limite ℓ est solution de l'équation $\dfrac{6}{5 - \ell} = \ell$, puis en déduire la valeur de ℓ.

***Exercice* 10.7**

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une suite bornée u telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = a_n(1 - u_n), \tag{2}$$

où $a_n \geq 2$ est le terme général d'une suite donnée, de limite infinie quand $n \to +\infty$.

a) Dans cette question l'entier $N \in \mathbf{N}$ est fixé ; on pose

$$v_{N,0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N},\ v_{N,k+1} = v_{N,k} + \frac{a_{N+2k} - 1}{a_N a_{N+1} \dots a_{N+2k}}.$$

Vérifier que la suite de terme général $v_{N,k}$ (pour $k \in \mathbf{N}$) est croissante, majorée par 2, et qu'on a pour tout $k \geq 1$

$$v_{N+1,k} = a_N(1 - v_{N,k}) - \frac{1}{a_{N+1} a_{N+2} \dots a_{N+2k-1}}.$$

b) En déduire que la limite $\ell_N = \lim_{k \to +\infty} v_{N,k}$ appartient à $\mathbf{R}$, et que $\ell_{N+1} = a_N(1 - \ell_N)$ pour tout $N \in \mathbf{N}$.

c) En quoi la suite de terme général ℓ_n répond-elle à la question initiale ? Déduire aussi de la relation (2) que cette suite converge et trouver sa vitesse de convergence.

Université de Provence — Télé-Enseignement

Licence MI - Algèbre et Analyse Élémentaires (UE1-4) - 1ère session

JUIN 2006 SUJET+CORRIGÉ

I

Soit u une suite croissante et v une suite décroissante, telles que u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]a;b]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On utilisera les théorèmes sur les suites pour répondre aux trois questions suivantes :

a) Rappeler pourquoi les limites $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ existent. *(sur 1 pt)*

Réponse : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ existe parce que la suite u est croissante et majorée par b ; et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ existe parce que la suite u est décroissante et minorée par a.

b) ℓ et ℓ' appartiennent-ils à $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$? *(sur 2 pts)*

Réponse : Quelle que soit u croissante à valeurs dans $]a;b]$, sa limite ℓ appartient aussi à $]a;b]$ parce que $\ell = \sup\{u_n \ / \ n \in \mathbf{N}\}$ et par conséquent $\ell \leq b$ et $\ell \geq u_n > a \Rightarrow \ell > a$.

Les réponses exactes sont $\ell \in]a;b]$, $\ell \in [a;b]$; mais $\ell \in]a;b[$ et $\ell \in [a;b[$ sont fausses.

Quelle que soit v décroissante à valeurs dans $]a;b]$, sa limite ℓ' appartient à $[a;b]$ parce que $\ell' = \inf\{v_n \ / \ n \in \mathbf{N}\}$ et par conséquent $a \leq \ell' \leq b$.

ℓ' pourrait être b (par exemple si v_n = constante $= b$; et ℓ' pourrait être a (si $v_n = a + \frac{1}{n}$). La seule réponse exacte est $\ell' \in [a;b]$.

c) Que peut-on dire de plus si on suppose que u est strictement croissante et v strictement décroissante (c'est à dire $u_{n+1} > u_n$ et $v_{n+1} < v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$). *(sur 2 pts)*

Réponse : La suite v ne peut plus converger vers b : ℓ' est la borne inférieure des v_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc $\ell' \leq v_{n+1} < v_n \leq b$, ce qui fait $\ell' < b$.

La seule réponse exacte est $\ell \in]a;b]$ et $\ell' \in [a;b[$.

II

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on notera $\overline{n}$ la classe de n modulo 6
(c'est à dire l'ensemble des $n + 6k$ pour $k \in \mathbf{Z}$).

D'autre part, si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbf{Z}$, on notera $A \cdot B$ l'ensemble des produits ab, avec $a \in A$ et $b \in B$.

a) Vérifier que l'ensemble $\overline{2} \cdot \overline{4}$ (c'est à dire l'ensemble des produits $(2 + 6k)(4 + 6k')$ pour tout k et k' dans $\mathbf{Z}$) n'est pas une classe modulo 6 mais une classe modulo 12. *(sur 1 pt)*

Réponse : On considère un élément de l'ensemble $\overline{2}\cdot\overline{4}$ *:*

$$(2+6k)(4+6k') = 8+12k'+24k+36kk' = 8+12(k'+2k+3kk')$$

ce qui prouve que $(2+6k)(4+6k')$ *appartient à l'ensemble des* $8+12k''$ *(avec* $k''\in\mathbf{Z}$*), c'est à dire à la classe de* 8 *modulo 12.*

Réciproquement soit $8+12k''$ *un élément de cette classe ;* $8+12k''$ *est égal à* $2(4+6k'')$*, qui appartient à l'ensemble* $\overline{2}\cdot\overline{4}$*.*

On a démontré que $\overline{2}\cdot\overline{4}$ *est égal à la classe de* 8 *modulo 12.*

b) Démontrer que $\{\overline{1},\overline{5}\}$ **est un groupe pour la loi** $\cdot$ *(ne pas oublier de démontrer que c'est une loi interne).* *(sur 3 pts)*

Réponse : Pour démontrer que c'est une loi interne, on remarque d'abord que

$\overline{1}\cdot\overline{1}$ *= ensemble des* $(1+6k)(1+6k') = 1+6(k+k'+6kk')$*, est inclus dans l'ensemble* $\overline{1}$ *;*

$\overline{1}\cdot\overline{5}$ *= ensemble des* $(1+6k)(5+6k') = 5+6(5k+k'+6kk')$*, est inclus dans l'ensemble* $\overline{5}$ *;*

$\overline{5}\cdot\overline{1}$ *= ensemble des* $(5+6k)(1+6k') = 1+6(k+5k'+6kk')$*, est inclus dans l'ensemble* $\overline{5}$ *;*

$\overline{5}\cdot\overline{5}$ *= ensemble des* $(5+6k)(5+6k') = 1+6(4+5k+5k'+6kk')$*, est inclus dans l'ensemble* $\overline{1}$*.*

Mais à chaque fois il faut démontrer l'inclusion en sens inverse (puisqu'on veut vérifier que chacun de ces quatre produits vaut $\overline{1}$ *ou* $\overline{5}$*) ; on vérifie donc, pour tout* $k''\in\mathbf{Z}$*, que*

$1+6k''$ *(élément quelconque de l'ensemble* $\overline{1}$*) est égal à* $(1+6k'')1$ *qui appartient bien à l'ensemble* $\overline{1}\cdot\overline{1}$*,*

$5+6k'' = 1(5+6k'')\in\overline{1}\cdot\overline{5}$*,*

$5+6k'' = (5+6k'')1\in\overline{5}\cdot\overline{1}$*,*

$1+6k'' = (-1-6k'')(-1) = (5-6(k''+1))(5-6)\in\overline{5}\cdot\overline{5}$*.*

Il reste à vérifier :

L'associativité : $(\overline{x}\cdot\overline{y})\cdot\overline{z}$ *est l'ensemble des produits* ab *avec* $a\in\overline{x}\cdot\overline{y}$ *et* $b\in\overline{z}$ *(c'est à dire,* $a=cd$ *avec* $c\in\overline{x}$ *et* $d\in\overline{y}$*). C'est donc l'ensemble des produits* cdb *pour tout* $c\in\overline{x}$*,* $d\in\overline{y}$*,* $b\in\overline{z}$*. On obtient le même résultat pour* $\overline{x}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z})$*, ce qui prouve que* $(\overline{x}\cdot\overline{y})\cdot\overline{z} = \overline{x}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z})$*.*

L'élément neutre est $\overline{1}$ *: on a* $\overline{x}\cdot\overline{1} = \overline{1}\cdot\overline{x} = \overline{x}$ *(pour* $\overline{x} = \overline{1}$ *ou* $\overline{5}$ *; ça fait partie des calculs déja faits pour vérifier que la loi est interne).*

L'élément symétrique de tout $\overline{x}$ *est* $\overline{x}$ *: on a* $\overline{x}\cdot\overline{x} = \overline{1}$ *(idem).*

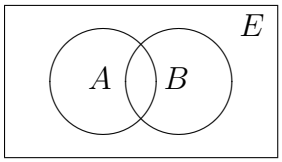
On a vérifié que $\{\overline{1},\overline{5}\}$ *est un groupe.*

III

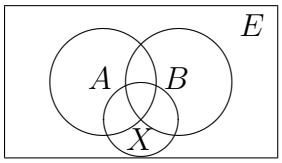
Soient A **et** B **deux sous-ensembles d'un ensemble** E**. Trouver un sous-ensemble** F **de** E **tel que**

$$\{X\in\mathcal{P}(E)\ /\ A\cap X = B\cap X\} = \mathcal{P}(F)$$

(faire si possible la démonstration, mais au moins un dessin). *(sur 3 pts)*
Réponse : Comme on le voit sur le dessin, les sous-ensembles A et B partagent E en quatre régions qui sont $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $E \setminus (AUB)$. On appelle A_1, A_2, A_3, A_4 ces quatre sous-ensembles :



On veut déterminer les sous-ensembles X tels que $A \cap X = B \cap X$:



Les A_k partagent X en quatre parties (éventuellement vides) qui sont les $X_k = X \cap A_k$.
Si X_1 n'est pas vide, on a $A \cap X \neq B \cap X$ (parce que X_1 fait partie de $A \cap X$ mais pas de $B \cap X$). Donc l'égalité $A \cap X = B \cap X$ implique que X_1 est vide.
De même, l'égalité $A \cap X = B \cap X$ implique que X_3 est vide.
Si X_1 et X_3 sont vides, alors $A \cap X = B \cap X = X_2$.
On a démontré que

$$\{X \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \cap X = B \cap X\} = \{X \in \mathcal{P}(E) \ / \ X_1 = X_3 = \emptyset\}.$$

Ce dernier ensemble est $\mathcal{P}(F)$, avec $F = A_2 \cup A_4$ c'est à dire

$$F = (A \cap B) \cup (E \setminus (AUB)).$$

IV

Démontrer par un encadrement simple que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

converge vers 0**.** *(sur 2 pts)*
Réponse : Pour $n, k \in \mathbf{N}$ on a

$$0 \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme u_n est la somme de n termes, on en déduit

$$0 \leq u_n \leq n\frac{1}{n^2}$$

c'est à dire, en simplifiant, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$*, ce qui prouve que la suite u converge vers* 0*.*

V

On définit une suite v en posant

$$v_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n - (v_n)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

a) Démontrer par récurrence $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ **pour tout** $n \in \mathbf{N}$ *(Indication : on pourra vérifier d'abord que la fonction $f(x) = x - x^2$ est croissante sur l'intervalle* $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$*).* **.** *(sur 2,5 pts)*

Réponse : La fonction $f(x) = x - x^2$ est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ *parce que sa dérivée $f'(x) = 1 - 2x$ est positive sur cet intervalle.*

L'inégalité $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ *est vérifiée pour $n = 0$, c'est à dire on a* $0 \leq v_0 = \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{0+1} = 1$.

L'inégalité $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ *est vérifiée pour $n = 1$, c'est à dire on a* $0 \leq v_1 = \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Soit n un entier (au moins égal à 1) pour lequel cette inégalité est vraie. Alors v_n appartient à l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ *(c'est une conséquence de* $n \geq 1$ *et de* $v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$*). On peut appliquer la fonction croissante f sans changer le sens de l'inégalité : on obtient*

$$0 \leq f(v_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

c'est à dire

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Comme on cherche à vérifier l'inégalité $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)+1}$*, il ne reste plus qu'à démontrer que* $\dfrac{1}{(n+1)+1} - \dfrac{n}{(n+1)^2}$ *est positif, ce qu'on obtient par étude de signe après avoir réduit au même dénominateur.*

b) En déduire que la suite de terme général $w_n = nv_n$ est croissante et convergente. *(sur 1,5 pts)*

Réponse : $w_{n+1} - w_n = (n+1)(v_n - (v_n)^2) - nv_n$. *En simplifiant on obtient* $w_{n+1} - w_n = v_n - (n+1)(v_n)^2 = v_n(1-(n+1)v_n)$. *Ce produit est positif d'après les inégalités qu'on a démontrées à la question précédente, donc la suite* w *est croissante.*

D'autre part elle est majorée par une constante : $0 \leq w_n = nv_n \leq n\dfrac{1}{n+1} \leq 1$.

Comme elle est croissante et majorée, elle converge.

c) Démontrer de même l'inégalité $v_n \geq \dfrac{1}{2n}$ à partir d'un rang qu'on précisera, et en déduire la vitesse de convergence de la suite v. *(sur 2 pts)*

Réponse : Pour $n = 4$ *on a* $w_n = w_4 = 4v_4 \simeq 0,516$ *; c'est plus grand que* $\dfrac{1}{2}$ *mais, comme la suite* w *est croissante, tous les termes* w_n *pour* $n \geq 4$ *sont plus grands que* $\dfrac{1}{2}$. *On en déduit* $nv_n \geq \dfrac{1}{2}$ *c'est à dire* $v_n \geq \dfrac{1}{2n}$. *Finalement on a*

$$\frac{1}{2n} \leq v_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$

c'est à dire la vitesse de convergence de la suite v *est de l'ordre de* $\dfrac{1}{n}$.

Université de Provence — Télé-Enseignement

Licence MI - Algèbre et Analyse Élémentaires (UE1-4) - 2ème session

Septembre 2006 sujet+corrigé

I

Soit a un entier relatif non nul ; on notera $a\mathbf{Z}$ l'ensemble des multiples de a :

$$a\mathbf{Z} = \{ak \ / \ k \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots\}.$$

a) Démontrer que $a\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$ pour l'addition. *(sur 2 pts)*

Réponse : L'ensemble des multiples de a est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$. La somme de deux multiples de a est un multiple de a. L'élément neutre (de $\mathbf{Z}$), qui est 0, est un multiple de a. Le symétrique d'un multiple de a pour l'addition, c'est à dire son opposé, est multiple de a. D'après le cours sur les groupes, c'est suffisant pour dire que l'ensemble des multiples de a est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.

b) Démontrer que la multiplication est une loi de composition interne dans $a\mathbf{Z}$. *(sur 1 pt)*

Réponse : ak_1ak_2 est multiple de a.

c) Démontrer que s'il y a un élément neutre pour la multiplication dans $a\mathbf{Z}$, alors $a\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$. *(sur 3 pts)*

Réponse : Soit e l'élément neutre. Alors $ae = a$ d'où, en divisant par a, $e = 1$. Tout entier est multiple de 1 ; il est donc multiple de a puisque $1 = e \in a\mathbf{Z}$, ce qui prouve que $\mathbf{Z} \subset a\mathbf{Z}$. L'inclusion en sens inverse va de soi.

II

On considère la suite u définie par

$$u_n = \frac{1}{n + (-1)^n}.$$

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_u$ des $n \in \mathbf{N}$ tels que u_n soit défini. *(sur 1 pt)*

Réponse : $\mathbf{N} \setminus \{1\}$.

b) On considèrera la suite u comme une application de $\mathcal{D}_u$ dans R. Démontrer que l'image de u est égale à l'ensemble des inverses d'entiers strictement positifs. *(sur 3 pts)*

Réponse : C'est vrai parce que, pour $n = 2k$ on a $n + (-1)^n = 2k + 1$, et pour $n = 2k + 1$ on a $n + (-1)^n = 2k$.

c) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. La suite u est-elle monotone à partir d'un certain rang ? *(sur 2 pts)*

Réponse : Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est l'inverse de celui de $(1/u_{n+1}) - (1/u_n)$. D'après le calcul précédent, si $n = 2k$ alors $(1/u_{n+1}) - (1/u_n) = -1$, et si $n = 2k+1$ alors $(1/u_{n+1}) - (1/u_n) = (2(k+1)+1) - 2k = 3$. Ce qui fait : $u_{n+1} - u_n > 0$ si n est pair, et $u_{n+1} - u_n < 0$ si n est impair. La suite u n'est donc pas monotone à partir d'aucun rang

d) Déterminer la limite de la suite u quand $n \to +\infty$ et sa vitesse de convergence. *(sur 2 pts)*

Réponse : Sa limite est nulle. Elle est équivalente à $1/n$ donc sa vitesse de convergence est de l'ordre de $1/n$.

III

Démontrer que les suites v et w définies par

$$v_n = \frac{n^2+3n}{n^2+1} \quad \textbf{et} \quad w_n = \frac{n^2-3n}{n^2+1}$$

sont adjacentes pour $n \in \mathbf{N}^*$ et déterminer leurs vitesses de convergence. *(sur 6 pts)*

Réponse : On vérifie facilement que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $w_{n+1} - w_n \geq 0$ (en réduisant au même dénominateur). Puis, $v_n - w_n = \dfrac{6n}{n^2+1}$ a pour limite 0. Les suites v et w sont donc adjacentes. Elles convergent vers 1, et $|v_n - 1|$ et $|w_n - 1|$ sont équivalents à $3/n$. Leurs vitesses de convergence sont donc de l'ordre de $1/n$.

Université de Provence — Télé-Enseignement

Licence MI - Algèbre et Analyse Élémentaires (UE1-4) - 1ère session

Mardi 5 juin 2007

Sujet+corrigé

Les quatre parties sont indépendantes

I

La suite de terme général $u_n = e^n - n$ est-elle croissante ? Déterminer sa limite et la borne inférieure de l'ensemble des u_n pour $n \in \mathbf{N}$. *(sur 3 pt)*

Réponse : $u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - n - 1 - e^n + n = e^n(e-1) - 1$ *est positif parce que* $e^n > 1$ *et* $e - 1 > 1$. *Donc la suite de terme général* $u_n = e^n - n$ *est croissante.*

Sa limite (quand $n \to +\infty$*) est* $+\infty$ *parce que*

$$e^n - n = e^n \left(1 - \frac{n}{e^n}\right)$$

et on sait que la limite de e^n *est* $+\infty$ *et celle de* $\dfrac{n}{e^n}$ *est* 0.

Comme elle est croissante, la borne inférieure de l'ensemble des u_n *pour* $n \in \mathbf{N}$ *est* $u_0 = 1$.

II

On définit une loi de composition notée $*$, en posant pour tout $x, y \in]1; +\infty[$

$$x * y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}.$$

a) Démontrer que $]1; +\infty[$ est un groupe pour la loi $*$ *(ne pas oublier de démontrer que c'est une loi interne)*. *(sur 3 pts)*

Réponse : On vérifie les quatre conditions de la loi de groupe :

Loi interne : Comme x *et* y *appartiennent à* $]1; +\infty[$*, leurs carrés sont strictement plus grands que* 1*, et par conséquent* $(x^2-1)(y^2-1) > 0$. *On en déduit que* $(x^2-1)(y^2-1)+1$ *et sa racine carrée sont strictement plus grands que* 1*, c'est à dire* $x * y \in]1; +\infty[$.

Loi associative : Calculons successivement $x*y$, $(x*y)*z$, $y*z$ et $x*(y*z)$. On obtient

$(x*y)*z = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1}$ *et* $x*(y*z) = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+$

d'où $(x*y)*z = x*(y*z)$ et la loi est associative.

Élement neutre : Appelons ϵ l'élément neutre. On trouve sa valeur en résolvant l'équation

$$x*\epsilon = x \Rightarrow (x^2-1)(\epsilon^2-1)+1 = x^2$$

(il faut trouver une solution qui ne dépende pas de x). Cette équation équivaut à

$x^2(\epsilon^2-2) = \epsilon^2-2$, donc $\epsilon = \sqrt{2}$ convient. On vérifie que $x*\epsilon$ et $\epsilon*x$ sont égaux à x.

Élement symétrique de x : Appelons x' cet élément. On trouve sa valeur en résolvant l'équation

$$x*x' = \epsilon \Rightarrow (x^2-1)(x'^2-1)+1 = 2.$$

Cette équation équivaut à $x^2x'^2-x^2-x'^2 = 0$, donc $x'^2 = \dfrac{x^2}{x^2-1}$, et $x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ convient (pour les $x \in]1,+\infty[$). Il appartient à $]1,+\infty[$, parce que $x^2 > x^2-1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2-1} > 1$. On vérifie que $x*x'$ et $x'*x$ sont égaux à ϵ.

b) L'ensemble des 2^n+1 pour $n \in \mathbf{N}$ est-il un sous-groupe ? *(sur 2 pts)*

Réponse : Non parce que l'élément neutre $\sqrt{2}$ n'est pas un entier, alors que 2^n+1 est entier pour tout $n \in \mathbf{N}$.

III

On considère la suite de terme général

$$v_n = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n.$$

a) Vérifier l'inégalité $v_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge. *(sur 2 pts)*

Réponse : Vérifions que $\dfrac{2n+1}{3n+2} \leq \dfrac{2}{3}$ *:*

$$\frac{2}{3} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{1}{3(3n+2)} \geq 0.$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *converge parce que c'est une série à termes positifs dont chaque terme* $\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ *est majoré par* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$*, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.*

b) Vérifier aussi l'inégalité $v_n \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ **et en déduire la vitesse de convergence de la suite de terme général** $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$**.** *(sur 3 pts)*

Réponse :

$$\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{1}{3} = \frac{3n+1}{3(3n+2)} \geq 0.$$

La vitesse de convergence de $s_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n$ *vers* $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *est géométrique parce qu'on a l'encadrement*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq s - s_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et, en appelant S_1 *la somme géométrique* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et* S_2 *la somme géométrique* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$*, cet encadrement équivaut à*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} S_1 \leq s - s_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} S_2$$

La suite w est définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$w_{n+1} = \frac{3}{2}(w_n - {w_n}^2).$$

a) Démontrer par récurrence les inégalités $\frac{1}{3} \leq w_n \leq \frac{1}{2}$. *(sur 3 pts)*

Réponse : Pour $n = 0$ on a bien $\frac{1}{3} \leq w_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

La fonction $\varphi(x) = \frac{3}{2}(x - x^2)$ est croissante pour $x \leq \frac{1}{2}$, parce que sa dérivée $\varphi'(x) = \frac{3}{2}(1 - 2x)$ est positive. Donc si au rang n on a les inégalités $\frac{1}{3} \leq w_n \leq \frac{1}{2}$, alors

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) \leq \varphi(w_n) \leq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

ce qui fait $\frac{1}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{3}{8} \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire l'inégalité $\frac{1}{4} \leq \frac{w_{n+1} - \frac{1}{3}}{w_n - \frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2}$ et la vitesse de convergence de w_n vers $\frac{1}{3}$ *(indication : remplacer w_{n+1} par sa valeur puis factoriser le numérateur)*. *(sur 4 pts)*

Réponse : On a $w_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\left(w_n - {w_n}^2 - \frac{2}{9}\right)$. Après avoir calculé les racines du polynôme $P(x) = x - x^2 - \frac{2}{9} = -x^2 + x - \frac{2}{9}$, on en déduit $P(x) = -\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$ et par conséquent

$$\frac{w_{n+1} - \frac{1}{3}}{w_n - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\left(w_n - \frac{2}{3}\right).$$

Or $w_n - \frac{2}{3}$ d'après la question précédente est compris entre $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{6}$. En multipliant par $-\frac{3}{2}$ on obtient bien les bornes $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

Ces inégalités impliquent, par récurrence,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \leq w_n - \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(w_0 - \frac{1}{3}\right).$$

La vitesse de convergence de w_n *vers* $\dfrac{1}{3}$ *est donc géométrique.*