Plaine

Algèbre, groupes et géométrie

Cours n° 1 : Rappels d'algèbre linéaire

Référence : Lelong Ferrand-Arnaudies Tome 1 Algèbre Dunod

I Espaces vectoriels, endomorphismes

Dans tout ce qui suit, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

1) Endomorphismes

→ On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ; $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un K espace vectoriel.

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire d'élément unité Id_E.

→ Théorème du rang : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$.

2) Sommes de sous espaces

→ Étant donnés r sous espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E, on note $\sum_{i=1}^{r} F_i = \{x_1 + \dots + x_r \ ; x_1 \in F_1, \dots, x_r \in F_r\}$ le sous-espace vectoriel somme des F_i.

→ On dit que cette somme est directe si l'application $F_1 \times \dots \times F_r \to \sum F_i$, $(x_1, \dots, x_r) \mapsto x_1 + \dots + x_r$ est une bijection, autrement dit si pour tout vecteur x de $\sum F_i$, il y a unicité de l'écriture $x = x_1 + \dots + x_r$ avec $x_i \in F_i$.

Notation $\sum_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

On a $\dim \bigoplus F_i = \sum \dim F_i$.

Prop La somme $\sum F_i$ est directe ssi pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}.$$

Cas particulier important : Si E est somme directe de 2 sous-espaces F et G, on dit que F et G sont supplémentaires dans E. Ceci équivaut à $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

Prop Tout sous espace vectoriel F de E admet un

→ On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. L'application

$q_i : E \to E \quad x \mapsto x_i$ où $x = x_1 + \dots + x_r$ (avec $x_j \in F_j$)

s'appelle la projection sur F_i parallèlement à (ou de direction) $\sum_{j \neq i} F_j$. C'est un endomorphisme de E (cf planche 1).

3) Groupe linéaire

Le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \times)$ s'appelle le groupe linéaire de E et se note $GL(E)$.

Prop Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes
① $u \in GL(E)$ ② $\mathrm{rg}\, u = n$ ③ u est injectif ④ u est surjectif
⑤ u est inversible à droite ⑥ u est inversible à gauche.

II Matrices

1) Matrices $n \times n$ à coefficients dans K

→ On note $M_n(K)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans K. $(M_n(K), +, \cdot)$ est un K espace vectoriel ; $(M_n(K), +, \times)$ est un anneau unitaire d'élément unité $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

L'espace vectoriel $M_n(K)$ est de dimension n^2 et admet pour base la famille $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ des matrices élémentaires

(ie $E_{ij} = (e_{\alpha\ell})_{1 \le \alpha, \ell \le n}$, avec $e_{\alpha\ell} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\ell}$

cad $E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \to \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \cdot \end{pmatrix}$
$\qquad\qquad\quad \uparrow j$

→ Le groupe des éléments inversibles de $M_n(K)$ s'appelle le groupe linéaire d'ordre n sur K et se note $GL_n(K)$ ou $GL(n, K)$.

2) Matrices et applications linéaires

→ Etant donnée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on définit pour $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \text{où } u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$, $u \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de K espace vectoriel et d'anneaux unitaires.

En particulier on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u+v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda u) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$$

La restriction de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ à $GL(E)$ définit un isomorphisme du groupe $GL(E)$ sur le groupe $GL_n(K)$.

Rem : en particulier $M \in GL_n(K)$ ssi M est inversible à droite ssi M est inversible à gauche.

Remarque : attention, tout ce qui précède dépend du choix au départ d'une base $\mathcal{B}$ de E (caractère "non canonique" des isomorphismes cités).

→ Inversement, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(K)$. Munissons K^n de sa base canonique $\mathcal{B}$. Alors il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(K^n)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Remarque : il est important de savoir associer ainsi à une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ un endomorphisme de K^n. Le choix de la base canonique est fait en général, par souci de simplicité

III Déterminants

1) Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E

$\boxed{\text{Etant donnée une base } \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ de } E}$ et n vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$, posons $x_i = \sum_{j=1} a_{j,i} e_j$.

Le déterminant des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ est le suivant :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Formule de Chasles si $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est une autre base de E,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

Prop l'application $\Delta : E^n \to K$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est une forme n-linéaire alternée sur K, donc une forme antisymétrique sur K.

$\Delta(\dots \alpha \dots \beta \dots) = -\Delta(\dots \beta \dots \alpha)$ $\qquad$ $\Delta(\dots \alpha, \dots, \alpha) = 0$

Prop On a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

2) Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$. On l'appelle déterminant de u et on le note $\det u$.

Prop 1) $\det(u \circ v) = \det u \det v$,
2) $u \in GL(E) \iff \det u \neq 0$.

3) Déterminant d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$; on appelle

(*) déterminant de A le nombre $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

→ Ainsi $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de A (éléments de K^n) dans la base canonique de K^n.

→ Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\det_u = \det(M_{\mathcal{B}}(u))$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Prop 1) $\det(AB) = \det A \det B$

2) $A \in GL_n(K) \iff \det A \neq 0$

3) $\det A = \det {}^tA$ (si $A = (a_{ij})$ ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$)

4) $A \times {}^t\mathrm{Com}\, A = \det A \cdot I_n$
où A est la matrice des cofacteurs de A.

$\boxed{\text{Algo}}$: revoir les calculs de déterminants (développement par rapport à une ligne, une colonne, déterminants classiques etc...)

Remarque : Si $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif et unitaire, et $A \in M_n(\mathcal{A})$ on peut encore définir le déterminant de A par (*). Dans ce cadre, on a encore

① $\det(AB) = \det A \det B$

③ $A \cdot {}^t\mathrm{Com}\, A = \det A\; I_n$

② $\det A = \det {}^tA$

et les règles de calcul sont les mêmes.