Repérage dans le plan et l'espace

Martine Quinio

16 novembre 2012

Résumé

On étudie différentes façons de représenter un point. Produit scalaire, produit vectoriel Orientation

1 Repérerage d'un point

Dans le plan, on peut repérer un point :

- en coordonnées cartésiennes : (x, y); souvent, $x = x(t), y = y(t)$, t étant le temps ;

- en coordonnées polaires : (r, θ); lien entre les différentes coordonnées : $x = rcos\theta$ $y = rsin\theta$

Lorsque x, y, z dépendent d'un paramètre t, ces variables sont liées : on peut, par exemple, trouver une relation entre x, y et z : c'est l'équation cartésienne de la trajectoire du point ; il y a d'autres manières de décrire une courbe.

Par exemple : si M(x,y) est tel que : $x = 2cost, y = 2sint$, t appartenant à $\mathbb{R}$; la trajectoire de M est le cercle de centre O et de rayon 2 ; si t appartient à $[0 ;\pi]$,la trajectoire de M est le demi cercle de centre O et de rayon 2 ; une autre façon de décrire la courbe est :

L'ensemble des points $M(r, \theta)$, ($\theta \in$[0 ;2π] où $\theta \in$[0 ;π]) et $r = 2$.

Dans l'espace :

- en coordonnées cartésiennes : (x, y, z), $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

- en coordonnées cylindriques : (r, θ, z); lien entre les différentes coordonnées : $x = rcos\theta$ $y = rsin\theta, z = z$.

- en coordonnées sphériques : (r, θ, φ); lien entre les différentes coordonnées :

$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

.

Latitude : $\pi/2-$ φ

Longitude : θ

Exemple : Paris : Latitude : $\varphi = 48°50'11.2$";Longitude : $\theta = 2°20'13.8$"

Moscou : Latitude : $\varphi = 55°45'39.4$";Longitude : $\theta = 37°39'53.1$"

Distance d entre Paris et Moscou ?

Le rayon de la Terre est de 6371km

Voir site Lexilogos.com : d=2491km

Il est utile de passer des coordonnées cartésiennes à d'autres coordonnées dans beaucoup de problèmes où les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées.

Rappels sur le produit scalaire ; expression

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$

c'est ainsi que l'on définit l'angle entre 0 et π de deux vecteurs.

Prérequis :

On connaît l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée ; orientation du plan par une base orthonormée ;

2 Produit vectoriel, orientation

Rappel : on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de sa structure euclidienne canonique définie par le produit scalaire :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{i=1}^{3} y_i e_i\right) \mapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i,$$

la norme associée étant notée $\|x\|$.

On note souvent le produit scalaire par $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$

Donnons la définition du produit vectoriel dans la base $\mathcal{B}$:

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, a,b,c,d étant des réels, est, par définition, le réel ad-bc.

Définition 1

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid e_i \rangle \, e_i = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Proposition 1 *On a :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$

et :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$$

Définition 2 *Déterminant (ou produit mixte) de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans la base $\mathcal{B}$. : c'est par définition le scalaire*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3, \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle .$$

On en déduit en particulier :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, e_i) \, e_i$$

2.1 Orientation, bases directes

L'orientation du plan par une base directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ permet d'orienter l'espace :
On a vu que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base de E.
Par définition, la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe

Proposition 2 *Le déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle on le calcule.*

Proposition 3 *Pour toute base orthonormée directe :*

$$e_2 \wedge e_3 = e_1, \; e_1 \wedge e_3 = -e_2, \; e_1 \wedge e_2 = e_3.$$

Proposition 4 *Pour toute base orthonormée directe : $Det(e_1, e_2, e_3) = 1$;pour toute base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) indirecte : $Det(e'_1, e'_2, e'_3) = -1$;*

Théorème 1

1. *Les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont colinéaires dans E si et seulement $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, alors le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ appartient à la droite orthogonale au plan engendré par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base de E.*
3. *Pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}'$ dans E on a :*
$$\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}' \rangle = \begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle & \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}' \rangle & \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u}' \rangle \end{vmatrix}.$$
4. *Pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dans E on a :*
$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle^2.$$
En particulier, on a $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
5. *Pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ dans E on a :*
$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w}$$
(le produit vectoriel n'est pas associatif).
6. *Si x est un vecteur non nul dans E pour tout vecteur $y \in E$ orthogonal à x il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in E$ tel $x \wedge \overrightarrow{w} = y$.*

Preuve 1

1. *Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont colinéaires, alors pour $i = 1, 2, 3$ $\det(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, e_i) = 0$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
Sinon il se complète alors en une base $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de E et $\det(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle \neq 0$ entraîne $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.On peut aussi facilement vérifier la formule avec les coordonnées du produit vectoriel.
2. *Avec $\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$, on déduit que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Avec l'antisymétrie du produit vectoriel on déduit que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est également orthogonal à $\overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, ils engendrent alors un plan orthogonal à la droite engendré par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base de E.*

3. Il suffit de vérifier la formule sur les vecteurs de base canonique, ce qui ne pose pas de problème.

4. De la formule précédente, on déduit que :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{u}\|^2 & \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle & \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{vmatrix} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle^2 .$$

5. On retiendra :

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle^2$$

2.2 Applications du produit vectoriel :

1. Equation cartésienne d'un plan P dans une base orthonormée : le plan étant défini par (A,$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) : alors le plan P est l'ensemble $\{$M, $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AM} = 0\}$
2. Distance d'un point M à une droite D(A,$\overrightarrow{u}$) : c'est : $d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$
3. Aire d'un paralléllogramme ABCD : c'est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = AB.AC \left|sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$
4. Volume d'un parallélépipède : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: c'est : $\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$
5. En mécanique : la notion de moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point O : c'est $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$
6. En mécanique : le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ rotation instantané est défini par $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, où $\overrightarrow{V(M)}$ est le champ des vitesses

3 Exemples et exercices

Exercice 1 *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$), écrire une équation cartésienne du plan passant par A(1 ;-2,1), dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 4, -2)$ et $\overrightarrow{v}(-1, 1, 3)$; calculer l'aire du parallélogramme ABDC, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$; calculer le volume du parallélépipède défini par (O,A,B,D,C).*

Solution 1 *Une équation cartésienne du plan P passant par A(1 ;-2,1), dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 4, -2)$ et $\overrightarrow{v}(-1, 1, 3)$ est obtenue en écrivant qu'un point M appartient à P si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$*

On obtient : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(14, -1, 5)$

Puis : $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 14(x - 1) - (y + 2) + 5(z - 1) = 0$

Donc une équation cartésienne du plan P est : $14x - y + 5z = 21$

l'aire du parallélogramme ABDC est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{14^2 + 1 + 5^2} = \sqrt{222}$

Volume du parallélépipède défini par (O,A,B,D,C): c'est : $\left|det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

21

Exercice 2 *Dans l'espace euclidien muni d'une base orthonormée* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, on considère les vecteurs :* $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{v}(-2,2,k)$ *k étant un réel et* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *: à quelle condition a-t-on* $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$*? à quelles conditions sur* λ, μ, ν *le système* $(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}, \nu\overrightarrow{w})$ *est-elle une base orthonormée ?*

Solution 2 *On obtient :* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(-4-k, -4-k, 0)$

Donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* $k \neq -4$

le système $(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}, \nu\overrightarrow{w})$ *est une base orthonormée si :*

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$:

Soit $k = 2$

Et si :

$$\lambda = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \mu = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{8+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{12}}; \nu = \frac{1}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2(4+k)^2}} = \frac{1}{\sqrt{72}}$$

bases directes : $b_1 = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_2 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$, $b_3 = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $b_4 = (\overrightarrow{-j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_5 = (\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$

Exercice 3 *L'espace étant muni d'une base orthonormée directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, dire parmi ces bases celles qui sont directes :* $b_1 = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_2 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$, $b_3 = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $b_4 = (\overrightarrow{-j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_5 = (\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$

Solution 3 $b_1 = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_2 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$, $b_3 = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $b_4 = (\overrightarrow{-j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $b_5 = (\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$

En appliquant les règles vues en cours, on a :

Les bases directes sont : $b_1; b_5$

Les bases indirectes sont : $b_2; b_3; b_4$