16 Matrice échelonnée, pivot de Gauss

On a vu que certaines matrices sont plus faciles que d'autres : les matrices triangulaires par exemple ;

L'idée est alors la suivante : pour déterminer le rang d'une matrice, essayons de la transformer en une autre matrice de même rang...

Donnons ces définitions :

Définition 16.1 *Le premier élément non nul d'une ligne d'une matrice s'appelle* élément distingué. *Si une ligne est nulle, elle ne comporte pas d'élément distingué.*

Définition 16.2 *Une matrice est dite* échelonnée *si les conditions suivantes sont* réalisées :

- si la ligne L_i est une ligne nulle, toutes les lignes $L_{i'}, i' > i$, sont nulles.

- si pour chaque élément distingué a_{ij}, les autres termes "au dessous" $a_{i'j}, i' > i$,de la même colonne j sont nuls.

- il y a un seul élément distingué par ligne ;

Dans ce cas, les éléments distingués sont appelés "PIVOTS"

Définition 16.3 *Si une matrice est* échelonnée *et qu'en plus, chaque élément distingué vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne, alors on dit que la matrice est* échelonnée réduite.

Exemple 16.1 *les matrices suivantes sont* échelonnées :

$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -3 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & \mathbf{5} & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$; *les pivots (ou éléments distingués) sonts :* $1, 5, 7, -1$;

Le rang de M est 4 ;

$N = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$: *N est* échelonnée réduite : *les pivots sonts :* $1, 1, 1$;*le rang de N est 3.*

Comment transformer une matrice en une matrice échelonnée et dans quel but ?

17 Algorithme de réduction d'une matrice à une matrice échelonnée

Etape 1 : appeler j_1 la première colonne comportant un élément a_{ij_1} non nul; choisir $a_{ij_1} = 1$ si possible.

Etape 2 : échanger les lignes 1 et i pour que cet élément apparaisse dans la première ligne ; premier pivot : a_{1j_1}

Etape 3 : faire la transformation de ligne : $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} L_1$; pour chaque $i > 1$

Etape 4 : répéter les étapes 1,2,3 avec la sous matrice formée par toutes les lignes sauf la première.

Exemple 17.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 3 & 10 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Le premier pivot est 1 :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1;$

Le deuxième pivot est 3 :

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3} L_2$

La matrice est échelonnée.

17.1 Matrices équivalentes

Définition 17.1 *Une matrice A est dite équivalente à une matrice B si B est obtenue en faisant subir à A les transformations suivantes dites élémentaires sur les lignes ou les colonnes :*

1. *Echanger deux lignes $L_i \leftrightarrow L_{i'}$*
2. *Multiplier la ligne L_i par λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$*
3. *Remplacer la ligne L_i par $L_i + kL_i$*

(De même pour les colonnes)

17.2 Matrices élémentaires

On va maintenant interpréter les notions de matrices équivalentes à l'aide de matrices élémentaires et de produit matriciel ; alors, ce qui apparaissait comme "magique" trouvera une explication très simple...

Soit e une transformation élémentaire sur les lignes de la matrice identité In (respectivement, f une transformation élémentaire sur les colonnes) :

On note $\Gamma = e(I)$ et $\Omega = f(I)$

On dit que Γ est la matrice élémentaire *associée à la transformation élémentaire e sur les lignes de I ;*

On dit que Ω est la matrice élémentaire *associée à la transformation élémentaire f sur les colonnes de I ;*

Proposition 17.1 *On a pour une même transformation élémentaire : Γ est la transposée de Ω.*

Exemple 17.2 *Soit la transformation :* $e : L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$;*donc* $f : C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

$$On\ a\ In = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma^t$$

Exemple 17.3 *Soit la transformation :* $L_2 \leftarrow 2L_2$; *donc* $f : C_2 \leftarrow 2C_2$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Omega \text{ car } \Gamma \text{ est symétrique dans ce cas ;}$$

Exemple 17.4 *Soit la transformation :* $L_2 \leftarrow L_3$: *donc* $f : C_2 \leftarrow C_3$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma \text{ car } \Gamma \text{est symétrique dans ce cas ;}$$

17.3 Propriétés des matrices élémentaires

On a les résultats très importants :

Proposition 17.2 *Toute* matrice élémentaire est inversible

Preuve 17.1 *Une transformation élémentaire sur les colonnes de la matrice identité est un isomorphisme car elle transforme une base en une base ; comme pour une même transformation élémentaire Γ est la transposée de Ω, le même raisonnement s'applique pour transformation élémentaire sur les lignes de la matrice identité.*

Proposition 17.3 *Soit e une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A, m lignes n colonnes : soit* $\Gamma_m = e(I_m)$: *alors* $e(A) = \Gamma_m A$

Proposition 17.4 *Soit f une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice B, p lignes m colonnes : soit* $\Omega_m = f(I_m)$: *alors* $f(B) = B\Omega_m$

Ainsi, il est facile de comprendre qu'une succession de transformations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes) d'une matrice revient à multiplier celle-ci à gauche (respectivement à droite) par un produit P de matrices élémentaires ; et donc :

Proposition 17.5 *Une matrice A est ligne-équivalente (respectivement colonne-équivalente) à une matrice N de même taille s'il existe une matrice P produit de matrices élémentaires telles que* $N = PA$ *(respectivement* $N = AQ$*)*

Théorème 17.1 *Deux matrices équivalentes sont de même rang r : c'est le nombre de pivots.*

Preuve 17.2 *très facile : cela découle directement de l'inversibilité d'une matrice élémentaire...*

On va utiliser ces résultats pour le calcul de de rang de matrices et de déterminants :

-On cherche une matrice échelonnée équivalente pour trouver le rang ;

-On utilise les propriétés des déterminants pour transformer un déterminant en un autre échelonné, pas forcément égal :

Exemple 17.5 *Quel est le rang des vecteurs* $U = (1, 2, 1, -3), V = (2, 1, 3, 4), W = (-1, -1, 2, 3), Y = (1, 1, 2, 1)$? *quel est le déterminant de ces vecteurs ?*

Une matrice échelonnée équivalente à $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *s'obtient petit à petit :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array} \right. :$$

puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{array} \right. :$$

puis : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array} \right. : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -15 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{array} \right. :$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, *puis,* $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

Donc :

Le rang du système est égal à 3 et le déterminant est nul.

Exemple 17.6 *Calculer le déterminant :* $D = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \end{vmatrix}$:

$$D = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 5(-45 - 8) = -265$$

On utilise aussi le résultat pratique suivant :

Proposition 17.6 *Toute matrice de rang r est équivalente à une matrice "par blocs" :* I_r *étant la matrice identité d'ordre r :* $\begin{pmatrix} I_r & \text{bloc nul} \\ \text{bloc nul} & \text{bloc nul} \end{pmatrix}$

18 Systèmes linéaires d'équations

Nous allons à présent utiliser les chapitres précédents pour résoudre des systèmes linéaires d'équations ; certains ouvrages placent ce chapitre en premier : cela signifie que d'un point de vue purement technique, il est possible de résoudre des systèmes linéaires sans le support théorique de l'algèbre linéaire ; mais, pour aller au fond des choses, pour comprendre les articulations des notions entre elles, il est préférable de placer ce chapitre à la suite des autres.

OBJECTIF : Résoudre des systèmes linéaires à n équations et p inconnues du type *:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ...a_{2p}x_p = b_2 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Soit, avec une simple écriture matricielle :

$$AX = B$$

Où A *est une matrice* $(a_{ij})_{i \leq n; j \leq p}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$ *est le vecteur inconnu, et* B *le second membre :* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ *: second membre ;* A *: matrice des coefficients*

D'abord un résultat théorique essentiel :

Théorème 18.1 *Le système linéaire à n équations et p inconnues* $AX = B$ *a une et une seule solution si et seulement si la matrice* A *est carrée et inversible ; cette solution est donnée sous forme de vecteur colonne par*

$$X = A^{-1}B$$

Preuve 18.1 *Evidente à l'aide des chapitres précédents.*

En pratique :
- Comment trouver cette unique solution dans ce cas ?
- Comment faire dans tous les autres cas ?

19 Résolution par méthode des matrices échelonnées

Voici comment on procède :

Comme les systèmes les plus simples sont ceux qui sont triangulaires, on utilise la méthode des matrices échelonnées ; plus précisément :

On écrit successivement des systèmes équivalents au premier en utilisant la "matrice augmentée du système :

C'est la matrice M ayant une colonne de plus que la matrice A, la colonne second membre.

On réduit alors la matrice M à une matrice échelonnée et on utilise les pivots :

La justification de cette méthode vient du fait qu'appliquer une transformation élémentaire sur la matrice M revient à l'appliquer sur les lignes du système ; le système admet au moins une solution si et seulement si la matrice augmentée échelonnée ne contient pas la ligne $(0,0,0,....,0,b_i)$, *avec* $b_i \neq 0$.

Exemple 19.1 $\left\{\begin{array}{c} x+y-2z+4t=1 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{array}\right.$

La matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

équivalente à : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} :$$

Ce système n'a pas de solution.

Exemple 19.2 $\left\{\begin{array}{c} x+y-2z+4t+u=1 \\ 2x+2y-3z+t+2u=3 \\ 3x+3y-4z-2t+\alpha u=5 \end{array}\right.$

La matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & \alpha & 5 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right. \text{ équivalente à :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \alpha-3 & 2 \end{pmatrix} \text{équivalente à : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \end{pmatrix}$$

On discute alors selon α :

Premier cas :

$\alpha = 3$

Il y a 2 pivots, $r = 2$;

Alors L3 est vraie quelque soit u ;

On obtient :

$\begin{cases} x+y-2z+4t=1 \\ z-7t=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-y+10t+3 \\ z=7t+1 \end{cases}$

Les variables y, t, u sont arbitraires

On a $n=3$, $p=5$, $r=2$:

Les variables y , t et u sont dites variables libres *(elles prennent toutes les valeurs réelles) : $p-r$ est le nombre de variables libres.*

*Les autres variables x et z (il y en a donc r) sont appelées "*inconnues principales*".*

Remarquons que le rang de la matrice augmentée M est 2 ; c'est le nombre d'inconnues principales, devant les pivots

Les pivots sont "1" en colonne 1 et "1" en colonne 3 :

Ce sont les colonnes des inconnues principales x et z.

Deuxième cas :

$\alpha \neq 3$:

Il y a 3 pivots, $r=3$

On obtient :

$\begin{cases} x+y-2z+4t=1 \\ z-7t=1 \\ u=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-y+10t+3 \\ z=7t+1 \\ u=0 \end{cases}$

Les variables y, t sont arbitraires

On a $n=3$, $p=5$, $r=3$:

Les variables y , t sont dites variables libres *(elles prennent toutes les valeurs réelles) : $p-r$ est le nombre de variables libres.*

*Les autres variables x , z et u (il y en a donc r) sont appelées "*inconnues principales*".*

19.1 Méthode du pivot de Gauss

Cette méthode se généralise et s'appelle "méthode du pivot de Gauss" :

L'algorithme consiste pour chaque pivot a_{IJ} à remplacer chaque ligne L_i ,$i \geq I$ par $L_i - \dfrac{a_{iJ}}{a_{IJ}} L_I$

Remarque 19.1 *On préfère, quand ces calculs donnent trop de dénominateurs, multiplier des lignes par des coefficients convenables et ne pas appliquer strictement la méthode du pivot de Gauss.*

Par exemple : si le pivot dans L_1 est 2 , et que L_2 commence par "3", on pourra faire la transformation :

$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$

On trouve l'algorithme détaillé dans de nombreux ouvrages et dans de nombreux cours sur internet : il suffit de taper "pivot de Gauss"...

Proposition 19.1 *Dans un système linéaire à n équations et p inconnues, le nombre r d'inconnues principales est le rang de la matrice augmentée ; il y a alors p-r variables libres, indéterminées à l'aide desquelles s'expriment les r inconnues principales.*

Voyons un exemple encore :

Exemple 19.3 *Soit le système* $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x+3y+z=3 \end{array}\right.$:

La matrice augmentée est :
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$ *équivalente à :* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2$

équivalente à : $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \end{pmatrix}$:

Le rang de la matrice est 3 : il y a 3 inconnues principales x, y et z.
Soit : $4z = 2 : z = \frac{1}{2}$; $y - z = -1 : y = -\frac{1}{2}$; $x - y + z = 2 : x = 1$
Le système admet l'unique solution :

$$S = \{(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$$

20 Cas des systèmes homogènes

Voyons particulièrement les systèmes homogènes : ceux du type $AX = O$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ...a_{2p}x_p = 0 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{np}x_p = 0 \end{array}\right. :$$

Remarquons que ces systèmes ont toujours au moins la solution nulle ; on va voir que l'on est en mesure non seulement de savoir si c'est la seule solution, mais aussi, dans le cas contraire, de donner une base de l'espace vectoriel des solutions :

Proposition 20.1 *Les solutions d'un système homogène forment un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$

Preuve 20.1 *Vérification facile : si X et Y sont des vecteurs solutions, alors $X+Y$; λX est aussi solution (d'où le nom de système linéaire...*

Ou bien, encore plus rapide, les solutions constituent le noyau d'une application linéaire de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$: celle dont la matrice est la matrice du système ; on va aller un peu plus loin...

Le théorème suivant permet de trouver facilement une base de l'espace vectoriel des solutions :

Théorème 20.1 *Les solutions d'un système homogène $AX = 0$ forment un espace vectoriel S de dimension égal au nombre de variables libres ; si r est le rang du système, p le nombre d'inconnues, les solutions forment un espace vectoriel de dimension $p-r$; c'est le nombre de variables libres, les autres sont les r inconnues principales. On obtient une base de cet espace de solutions en posant par exemple successivement chaque variable libre égale à 1, et et les autres variables libres nulles.*

Preuve 20.2 *On a en effet le théorème du rang : $dimKerf = \dim E = p - rangf = p-r$;comme ce noyau représente l'espace vectoriel des solutions, on a le résultat annoncé...*

Ainsi, la détermination du rang du système permet de savoir quel type de solutions on va trouver ;

En particulier :

Remarque 20.1 - Si le système est carré (n équations, $n = p$ inconnues) et de rang $r = n$: autrement dit si le déterminant du système est non nul : l'espace vectoriel des solutions est de dimension nulle : on le savait, seul le vecteur nul est solution !

- - Si le système a plus d'inconnues p que d'équations n, alors $r \leq n < p$: donc $p-r \neq 0$: Un tel système admet toujours d'autres solutions que la solution nulle car dimS$\geq$ 1...

Exemple 20.1 Cherchons les solutions et une base des solutions du système :

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=0 \\ 2x+2y-3z+t=0 \\ 3x+3y-4z-2t=0 \end{cases}$$

On obtient le système échelonné équivalent en reprenant des calculs déjà faits :

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=0 \\ z-7t=0 \end{cases}$$

D'où : le rang est 2 ; donc les solutions forment un espace de dimension $4-2=2$:

Il y a 2 variables libres, et 2 inconnues principales que l'on peut prendre comme premières de leur ligne : x et z.

Ce sont celles où dont les pivots sont les coefficients.

Alors t et y sont variables libres et :

$z = 7t$; $x = -y + 10t$

Pour trouver une base (U,V) des solutions du système, posons $y = 1$ et $t = 0$:

$U = (-1, 1, 0, 0)$

Puis, posons $t = 1$ *et* $y = 0$ *:*

$V = (10, 0, 7, 1)$:

On conclut :

Les solutions du système sont définies par le plan vectoriel de base $U = (-1, 1, 0, 0)$ $V = (10, 0, 7, 1)$

Ce sont les combinaisons linéaires de U *et de* V *:*

$$S = \{W(-y + 10t, y, 7t, t); y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

On peut aussi trouver une base par d'autres méthodes :

$\begin{cases} x = -y + 10 \\ y = y \\ z = 7t \\ t = t \end{cases}$ *d'où les vecteurs* $U(-1, 1, 0, 0)$ *;* $V(10, 0, 7, 1)$, *et*

$$S = \{W(x, y, z, t), W = yU + tV\}$$

Dans un système linéaire $AX = B$:

Nb d'équations	*Nb d'inconnues*	*Rang : nb de pivots*	*Var. libres*	*Inc. principales*
n	p	r	$p - r$	r;*devant les pivots*

- Un seul cas de solution unique : si $n = p = r$, c'est à dire A carrée et inversible : $DetA \neq 0$.

- On échelonne la matrice augmentée et on exprime les r inconnues principales en fonction des $p - r$ variables libres.

- De plus si le système est homogène ($AX = 0$), les solutions forment un espace vectoriel S de dimension $p - r$:

C'est le noyau d'une application linéaire f de E, $dimE = p$, dans F, $dimF = n$, de matrice A dans des bases données :

$$DimKerf = p - r$$

- Les colonnes de A-il y en a autant que la dimension de E- sont les composantes d'une famille génératrice de Imf, espace vectoriel de dimension r :

$$Imf = Vect(C_i)_{i \leq n}$$

On a le théorème du rang :

$$DimKerf + DimImf = DimE$$