MATHEMATIQUES POUR PC 2
Devoir 2 (calcul différentiel) – À rendre jeudi 2 avril

I

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

où $m, n \in \mathbb{N}$ sont deux constantes.

1) a) Calculer $f(x,0)$ et $f(x,x)$ ainsi que leurs limites quand $x \to 0$. En déduire que, si $m+n \leq 2$, $f(x,y)$ n'a pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$ et f est discontinue en $(0,0)$.

b) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x + iy = re^{i\theta}$, vérifier que $|f(x,y)| \leq r^{m+n-2}$ et en déduire que f est continue en $(0,0)$ si $m+n > 2$.

2) a) Calculer $f(x,0)$; en déduire la condition d'existence et la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

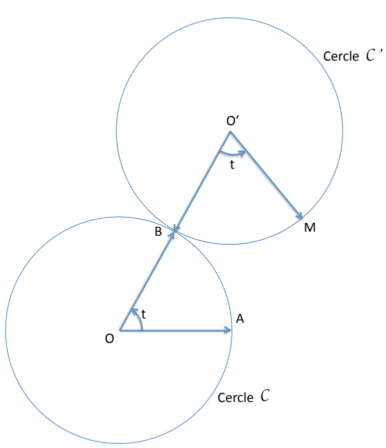
b) Faire de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ puis vérifier que f est différentiable en$(0,0)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ est nul *(on distinguera le cas $mn \neq 0$ des cas $m = 0$ et $n = 0$).*

c) À l'aide de la question 1), donner la condition sur m et n pour que f soit différentiable en$(0,0)$.

3) Dans le cas $m = 1$ et $n = 3$ vérifier que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$ est différent de $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$.

II

La *cardioïde* est la trajectoire d'un point M fixé à un cercle $\mathcal{C}'$ qui roule sans glisser sur un autre cercle $\mathcal{C}$ (fixé) de même diamètre (qu'on supposera égal à 1) :



a) Calculer les coordonnées de M en fonction de t.

b) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions obtenues à la question a) pour $t \in [0, 2\pi]$, et représenter la trajectoire du point M (ne pas oublier la tangente au point A pour $t = 0$ et $t = 2\pi$).