Corrigé du devoir 1

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

1) A_n est symétrique, c'est donc la matrice d'une forme bilinéaire symétrique f_n. Soit q_n la forme quadratique associée. On appelle matrice de q_n, la matrice de l'unique forme bilinéaire symétrique f, telle que q_n soit associée à f. L'unicité de f est démontrée à la Proposition 3.3 ; donc f c'est f_n, et la matrice de q_n est M_n.

2) Cas $n = 2$:

a) $q_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

b) Les termes contenant x_1 sont :

$2x_1^2 - 2x_1x_2$, ce qui fait $2\left((x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{4}x_2^2\right)$. On en déduit

$$q_2(x_1, x_2) = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2.$$

C'est la décomposition de Gauss de q_2 (voir Théorème 3.9).

La signature est $(s, t) =$ (nombre de termes positifs, nombre de termes négatifs) ; donc la signature de q_2 est (2,0).

Le rang de q_2 est $s + t = 2$. Son noyau est $\{0\}$ puisque rang(q_2) =dim$(\mathbf{R}^2)$.

3) Cas particulier $n = 3$:

a) $q_3(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

b) Les termes contenant x_1 sont :

$2x_1^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3)$, ce qui fait $2\left((x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3))^2 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2\right)$.

On en déduit la décomposition de Gauss de q_3 :

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2, x_3) &= 2\left(x_1 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + 2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \tfrac{3}{2}(x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Sa signature est $(s, t) = (2, 0)$.

Son rang est $s + t = 2$.

Son noyau, d'après la Proposition 2.15, est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résoud donc le système d'équations $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ et on obtient que le noyau de q_3 est l'ensemble des vecteurs (x, x, x) (pour $x \in \mathbf{R}$).

c) Pour répondre à cette question, il faut d'abord préciser quelles sont les trois formes linéaires de la décomposition de Gauss :

$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$,

$\ell_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3$,

$\ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$

puisque $q_3 = 2{\ell_1}^2 + \frac{3}{2}{\ell_2}^2 + 0{\ell_3}^2$.

D'après la Proposition 3.10, la matrice de q_3 dans la base (b_1, b_2, b_3) de $\mathbf{R}^3$ (dont la base duale est $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$) est diagonale.

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $(\mathbf{R}^3)^*$ à (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3), et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à (b_1, b_2, b_3). On détermine P à l'aide de la formule $P = ^t(T^{-1})$; les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont les colonnes de P c'est à dire les lignes de T^{-1} :

$b_1 = (1, 0, 0)$

$b_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$

$b_3 = (1, 1, 1)$.

4) Cas n quelconque : il suffit de reprendre les calculs faits à la question 3, avec n coordonnées au lieu de 3. Toutefois pour résoudre la question 4a, il y a des remarques à faire qui évitent d'être bloqué dans les calculs.

a) $q_n(x_1, \ldots, x_n) = 2\sum_i x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j$.

Il s'agit dans un premier temps de mettre q_n sous la forme $a_1{\ell_1}^2 + q$, où $q(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend que de $x_2, \ldots, x_n$. On va le faire plus généralement pour la forme quadratique définie par

$$q_{h,a,b}(x_1, \ldots, x_n) = a \sum_{h \leq i \leq n} x_i^2 + b \sum_{h \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

(avec cette notation, la forme quadratique q_n s'appelle maintenant $q_{1,2,-2}$). Le but est de trouver une forme linéaire ℓ et des réels c, d tels que

$$q_{h,a,b} = a\ell^2 + q_{h+1,c,d}$$

Par la méthode de la question 3b on obtient (si a n'est pas nul) :

$$q_{h,a,b}(x_1, \ldots, x_n) = a\left(x_h + \frac{b}{2a}\sum_{i\geq h+1} x_i\right)^2 + q_{h+1,c,d}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

avec $c = \frac{(2a+b)(2a-b)}{4a}$ et $d = \frac{b(2a-b)}{2a}$.
Si a est nul on obtient (en utilisant la formule classique $\alpha\beta = \frac{1}{4}\,(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$) :

$$\begin{aligned} q_{h,0,b}(x_1, \ldots, x_n) = \tfrac{b}{4}\left(x_h + x_{h+1} + 2\textstyle\sum_{i\geq h+2} x_i\right)^2 - \tfrac{b}{4}(x_h - x_{h+1})^2 \\ +q_{h+2,-b,-b}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad (**)$$

On considère maintenant la forme quadratique $q_{1,2,-2}$. Appliquons deux fois de suite la relation (*), puis une fois la relation (**) :

$$\begin{aligned} q_{1,2,-2} &= 2{\ell_1}^2 + q_{2,\frac{3}{2},-3} \\ &= 2{\ell_1}^2 + \tfrac{3}{2}{\ell_2}^2 + q_{3,0,-6} \\ &= 2{\ell_1}^2 + \tfrac{3}{2}{\ell_2}^2 - \tfrac{3}{2}{\ell_3}^2 + \tfrac{3}{2}{\ell_4}^2 + q_{5,6,6} \end{aligned}$$

avec
$\ell_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - \frac{1}{2}\sum_{i\geq 2} x_i$
$\ell_2(x_1, \ldots, x_n) = x_2 - \sum_{i\geq 3} x_i$
$\ell_3(x_1, \ldots, x_n) = x_3 + x_4 + 2\sum_{i\geq 5} x_i$
$\ell_4(x_1, \ldots, x_n) = x_3 - x_4$.
Il reste à appliquer $n-4$ fois la relation (*) à $q_{5,6,6}$, après avoir fait la remarque suivante :
dans la relation (*), si a, b, $2a-b$ sont strictement positifs, alors c, d, $2c-d$ le sont aussi puisque $2c-d = \frac{(2a+b)(2a-b)}{2a} - \frac{b(2a-b)}{2a} = 2a-b$.
On conclut qu'il existe des réels strictement positifs $a_5, \ldots, a_n$ et des formes linéaires $\ell_5, \ldots, \ell_n$ tels que

$$q_{5,6,6} = a_5{\ell_5}^2 + \ldots + a_n{\ell_n}^2.$$

La décomposition de Gauss de q_n est (si $n \geq 4$) :

$$q_n = 2{\ell_1}^2 + \frac{3}{2}{\ell_2}^2 - \frac{3}{2}{\ell_3}^2 + \frac{3}{2}{\ell_4}^2 + a_5{\ell_5}^2 + \ldots + a_n{\ell_n}^2$$

et sa signature est $(s,t)=(n-1,1)$.

On aurait pu le démontrer de façon différente, en adaptant la méthode utilisée dans le corrigé de l'exercice 3.5.

b) Le noyau de q_n est $\{0\}$ (si $n\geq 4$) puisque

$$\operatorname{rang}(q_n)=s+t=n=\dim(\mathbf{R}^n).$$

c) La méthode est celle de la question 3c. Les formes linéaires $\ell_1,\ldots,\ell_4$ ont été calculées à la question 4a, les formes linéaires $\ell_5,\ldots,\ell_n$ sont :

$\ell_5(x_1,\ldots,x_n)=x_5+\frac{1}{2}\sum_{i\geq 6}x_i$

$\ell_6(x_1,\ldots,x_n)=x_6+\frac{1}{3}\sum_{i\geq 7}x_i$

$\ell_7(x_1,\ldots,x_n)=x_7+\frac{1}{4}\sum_{i\geq 8}x_i$ ...

Les coordonnées de $\ell_1,\ldots,\ell_n$ dans la base canonique de $(\mathbf{R}^3)^*$ sont donc les colonnes de la matrice

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

La base de $\mathbf{R}^n$ (dans laquelle q_n est représentée par une matrice diagonale) est constituée par les lignes de T^{-1}, c'est à dire les vecteurs

$b_1=(1,0,0,0,0,0,0,\ldots,0)$

$b_2=(\frac{1}{2},1,0,0,0,0,0,\ldots,0)$

$b_3=(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,\ldots,0)$

$b_4=(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0,0,\ldots,0)$

$b_5=(-1,-1,-1,-1,1,0,0,\ldots,0)$

$b_6=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0,\ldots,0)$

$b_7=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,\ldots,0)$

$\vdots$

$b_n=(-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},-\frac{1}{n-4},\ldots,1).$