

Corrigé du devoir 2

Exercice 4.8

1) a) D'après la définition, M est orthogonale si et seulement si elle est inversible et $M^{-1} = {}^tM$. On résume en écrivant

$$\begin{aligned} M \text{ orthogonale} &\Leftrightarrow M {}^tM = {}^tM M = I_n \quad (\text{matrice unité d'ordre } n) \\ &\Leftrightarrow {}^tM M = M {}^tM = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^tM {}^t({}^tM) = {}^t({}^tM) {}^tM = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^tM \text{ orthogonale.} \end{aligned}$$

b) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}$ signifie : $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ avec $\lambda_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^n \lambda_i| &= |\sum_{i=1}^n (1 \cdot \lambda_i)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \\ &\leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \end{aligned}$$

Remarquons que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc en transposant on a $(\lambda_1 \dots \lambda_n) = (1 \dots 1) {}^tM$, puis en faisant le produit :

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (1 \dots 1) {}^tM M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \dots 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = n$. On a donc bien

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij} \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{n} = n.$$

2) Le calcul de M^2 donne $M^2 = I_3$. Donc l'endomorphisme s de $\mathbf{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est M , vérifie $s \circ s = \text{Id}_3$ (identité de $\mathbf{R}^3$). On sait qu'un tel endomorphisme est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_3)$, parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_3)$.

On détermine donc ces deux sous-espaces vectoriels : on obtient que s est la symétrie par rapport au plan d'équation $ux + vy + wz = 0$, parallèlement à la droite d'équation $ux = vy = wz$.

M appartient au groupe orthogonal de degré 3 sur $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est inversible et $M^{-1} = {}^tM$. On sait déjà que M est inversible et $M^{-1} = M$. On peut donc dire qu'elle appartient au groupe orthogonal si et seulement si $M = {}^tM$, ce qui équivaut à $u^2 = v^2 = w^2$.

Exercice 4.10

P est le plan orthogonal au vecteur $u = (1, 1, 1)$, donc la projection orthogonale sur le plan P est $p = \text{Id}_3 - q$, où q est la projection orthogonale sur la droite de vecteur directeur u . Celle-ci est définie par $q(v) = (v|u')u'$ avec $u' = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, donc

$$q(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

et

$$p(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

La symétrie orthogonale par rapport au plan P est $s = \text{Id}_3 - 2q$ donc

$$s(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z).$$