Juin 1999

Algèbre (durée: 1h 20mn)

$M_{m,n}(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à m lignes et n colonnes.

Partie I

1) a) Montrer que la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ d'une forme quadratique q sur $\mathbf{R}^3$.

b) Donner une décomposition de Gauss de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes sur $\mathbf{R}^3$. En déduire que q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^3$.

2) Montrer que $r(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ définit une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^3$. Donner sa matrice V dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et déterminer son noyau.

3) a) Soient a, b et c trois réels, montrer que $s(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$ définit une forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est donnée par ${}^tL.L$ où L désigne la matrice (a, b, c) de $M_{1,3}(\mathbf{R})$.

b) En déduire que les matrices U et V peuvent s'écrire sous la forme:

$$U = {}^tS_1.S_1 + {}^tS_2.S_2 + {}^tS_3.S_3 \quad \text{et} \quad V = {}^tT_1.T_1 + {}^tT_2.T_2$$

où S_1, S_2, S_3, T_1 et T_2 sont des matrices de $M_{1,3}(\mathbf{R})$ que l'on explicitera.

Partie II

Soient A et B deux matrices de $M_{m,n}(\mathbf{R})$ dont les coefficients de i ème ligne et de j ème colonne sont donnés par les réels $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$. On associe à A et B la matrice C dont le coefficient de i ème ligne et de j ème colonne est donné par $c_{i,j} = a_{i,j}.b_{i,j}$. On note alors $C = A \star B$.

1) a) Montrer que pour A, B et B' matrices de $M_{m,n}(\mathbf{R})$ on a:

$$A \star (B + B') = (A \star B) + (A \star B').$$

b) Soient S et T deux matrices de $M_{1,n}(\mathbf{R})$ montrer que:

$$({}^tS.S) \star ({}^tT.T) = {}^t(S \star T).(S \star T).$$

2) Montrer que si A est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ d'une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^n$ alors il existe n réels $(\lambda_k)_{k=1,\cdots,n}$ et n matrices $(S_k)_{k=1,\cdots,n}$ de $M_{1,n}(\mathbf{R})$ tels que:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.({}^tS_k.S_k).$$

3) a) Montrer que si A et B sont les matrices dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ de deux formes quadratiques positives sur $\mathbf{R}^n$ alors $C = A \star B$ est aussi la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ d'une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^n$.

b) En déduire sans calculs que la matrice W donnée par:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -7 \\ 0 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ d'une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^3$.