Septembre 1999

Algèbre (durée: 1h 20mn)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, A_n désigne la matrice $n \times n$ dont les coefficients réels sont donnés par:

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad (A_n)_{i,j} = i + j + 1.$$

1) Montrer que la matrice A_n peut être considérée comme la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$. Dans la suite on notera q_n cette forme quadratique.

2) Cas particulier $n = 3$:
a) Exprimer $q_3(x_1, x_2, x_3)$ pour tout (x_1, x_2, x_3) pris dans $\mathbf{R}^3$.
b) Donner une décomposition de Gauss de q_3, préciser son rang et sa signature.

c) Déterminer une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle q_3 est représentée par une matrice diagonale.

d) Déterminer le noyau de q_3.

4) Cas général:

a) Montrer que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad q_n(x_1, \cdots, x_n) = \Big[l_1(x_1, \cdots, x_n) \Big]^2 - \Big[l_2(x_1, \cdots, x_n) \Big]^2;$$

où l_1 et l_2 sont deux formes linéaires indépendantes de $\big(\mathbf{R}^n\big)^*$ que l'on déterminera.

b) En déduire la signature de q_n.

c) Donner une base $(f_1, \cdots, f_n)$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle q_n est représentée par une matrice diagonale.

d) Déterminer le noyau de q_n.