

Examen 2MK et 2MP

Première session 2001

(durée: 4 heures)

NB:

- 1) Répondre sur deux copies distinctes: une pour la partie algèbre et une pour la partie analyse.
- 2) Les documents ne sont pas autorisés.

Algèbre

- 1) a) Montrer que l'expression analytique suivante:

$$x^2 + y^2 + 2(x \cos \alpha + y \sin \alpha)z$$

définit, pour chaque valeur du paramètre α réel, une forme quadratique q_α sur $\mathbf{R}^3$.

b) Donner une expression de la forme polaire P_α associée à q_α .

c) Donner la matrice A_α de q_α dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$.

2) a) Donner une décomposition de Gauss de q_α .

b) En déduire son rang, sa signature et son noyau.

c) Déterminer une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle q_α a pour expression analytique:

$$X^2 + Y^2 - Z^2.$$

d) La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) est-elle orthogonale?

3) On note $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A_α

b) Déterminer une base (g_1, g_2, g_3) de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle q_α a pour expression analytique:

$$X'^2 + \phi Y'^2 - \left(\frac{1}{\phi}\right) Z'^2.$$

c) Que peut-on dire de la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (g_1, g_2, g_3) ?

4) On identifie $\mathbf{R}^3$ et l'espace tridimensionnel $\mathcal{E}$: les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont respectivement les vecteurs unitaires des axes orthogonaux Ox, Oy et Oz .

Déterminer la forme de l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) dans la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) vérifient:

$$x^2 + y^2 + 2(x \cos \alpha + y \sin \alpha)z = 0.$$

Analyse

Partie I

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application périodique, de période 2π , et intégrable (Riemann) sur un intervalle période.

- a) Donner la définition de la série de Fourier (en “sinus-cosinus”) de f .
- b) Si f est dérivable, de dérivée f' intégrable, comment déduit-on la série de Fourier de f' à partir de celle de f ? Justifier votre réponse.

Partie II

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{n^2}}{1+n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n, \quad \sum_{n \geq 0} \cos(n) z^n.$$

Partie III

Soit l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ périodique de période 2π , définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -3/2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ +3/2 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Justifier, sans calcul, les propriétés suivantes de la série de Fourier $S(f)$ de f .
 - a) Le coefficient constant et les coefficients des cosinus sont nuls.
 - b) $S(f)$ converge en tout point x et a pour somme $f(x)$.
 - c) $S(f)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé I contenu dans $] -\pi, 0[$ ou dans $]0, \pi[$.
 - d) $S(f)$ ne converge pas uniformément sur tout intervalle fermé I de longueur non nulle et contenant 0 (distinguer le cas où 0 est, ou n'est pas, une des extrémités de I).
- 2) Montrer par un calcul direct que

$$S(f) := \frac{6}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

- 3) En déduire que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- 4) Utiliser la formule de Parseval pour démontrer la formule:

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- 5) Utiliser la question 2) pour obtenir la série de Fourier de l'application $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, périodique de période 2π et définie sur $[-\pi, \pi[$ par $F(x) = \frac{3}{2}|x|$. Retrouver la formule (*) en calculant $F(0)$ à partir de la série de Fourier de F .
-