UNIVERSITE DE PROVENCE
Centre de Télé Enseignement Sciences

Examen 2MK et 2MP
Deuxième session 2001
(durée: 4 heures)

NB:
1) Répondre sur <u>deux copies distinctes:</u> une pour la partie algèbre et une pour la partie analyse.
2) Les documents ne sont pas autorisés.

ALGEBRE

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, A_n désigne la matrice $n \times n$ dont les coefficients réels sont donnés par:

$$(A_n)_{i,j} = -1 \text{ si } i \neq j \text{ et } (A_n)_{i,i} = n - 1$$

1) Montrer que la matrice A_n peut être considérée comme la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$. Dans la suite on notera q_n cette forme quadratique.

2) Cas particulier $n = 2$:

a) Exprimer $q_2(x_1, x_2)$ pour tout (x_1, x_2) pris dans $\mathbf{R}^2$.

b) Déterminer la signature de q_2, son rang et son noyau.

3) Cas particulier $n = 3$:

a) Exprimer $q_3(x_1, x_2, x_3)$ pour tout (x_1, x_2, x_3) pris dans $\mathbf{R}^3$.

b) Donner une décomposition de Gauss de q_3, préciser son rang, sa signature et son noyau.

c) Déterminer une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle q_3 est représentée par une matrice diagonale.

4) Cas général:

a) Déterminer, en fonction de n, la signature de q_n.

b) Déterminer le noyau de q_n.

c) Donner une base $(f_1, \cdots, f_n)$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle q_n est représentée par une matrice diagonale.

Tournez s.v.p

ANALYSE

Partie I

(Question de cours)

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications définies sur I et à valeurs réelles ou complexes.

a) Donner la définition de la propriété suivante:

$$\text{“}\textit{la suite } (f_n)_n \textit{ converge uniformément sur } I \textit{ vers } f\text{”}.$$

b) Outre la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f, on suppose les applications f_n continues. Démontrer que f est alors continue.

Partie II

Soient les suites d'applications numériques $(f_n)_n$ $(g_n)_n$ $(h_n)_n$ suivantes:

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{nx^2+1}\ (x \in \mathbf{R}), \quad g_n(x) = x^n e^{-nx^4}\ (x \in \mathbf{R}), \quad h_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{x^2+k^2}\right)\ (x \in \mathbf{R}).$$

a) Montrer que ces suites convergent simplement; les limites sont notées respectivement f, g et h.

b) Déterminer les applications f et g.

c) Pour chacune de ces suites, déterminer si la convergence est uniforme ou pas.

Partie III

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications numériques définies sur $[0,1]$. On suppose que la suite converge simplement vers une application $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.

a) Montrer que pour toute partie finie E de $[0,1]$, on a

$$\lim_n (\max_{e \in E} |f_n(e) - f(e)|) = 0.$$

On suppose maintenant les f_n dérivables, d'applications dérivées f'_n uniformément bornées, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ et tout indice n, $|f'_n(x)| \leq M$ (en 0 et 1, $f'_n(0)$ et $f'_n(1)$ désignent respectivement les dérivées à gauche et à droite).

b) Montrer que f est continue, plus précisément, montrer que pour tout x et y dans $[0,1]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

c) En combinant (a) et (b), démontrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

d) Donner un exemple d'une telle suite $(f_n)_n$ où la limite f n'est pas dérivable.