

Examen 2M5 et 2MP

Première session 2002

(durée: 4 heures)

NB:

1) Répondre sur deux copies distinctes: une pour la partie algèbre et une pour la partie analyse.

2) Les documents ne sont pas autorisés.

Algèbre

Exercice 1:

On considère la forme quadratique q sur $\mathbf{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ par:

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yt - 2zt.$$

- 1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
- 2) Déterminer une base du noyau de q .
- 3) Donner la signature de q .
- 4) Déterminer une base de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle q est représentée par une matrice diagonale.

Exercice 2:

On munit $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel noté $(\cdot | \cdot)$.

Soit u un automorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^4$ tel que:

$$u \circ u = -Id_{\mathbf{R}^4}$$

- 1) Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{R}^4$,
 - a) montrer que $(x | u(x)) = 0$,
 - b) en déduire que le sous espace vectoriel engendré par x et $u(x)$ est un plan vectoriel que l'on notera P .
 - c) Ecrire la matrice, dans la base $(x, u(x))$, de la restriction de u à P .
- 2) a) Montrer qu'il existe une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est A .

Analyse

Partie I (cours)

- a) Rappeler les définitions de convergence simple, uniforme et normale pour une série de fonctions.
- b) Enoncer le théorème de Dirichlet pour une fonction 2π -périodique.

Partie II

Soit la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

- a) Etudier la convergence a priori de la série de Fourier de f , c'est-à-dire sans connaître explicitement $S(f)$.
- b) Déterminer la série de Fourier de f .
- c) Montrer que, a posteriori, la convergence de $S(f)$ est normale sur $\mathbf{R}$.
- d) Prouver la formule

$$\frac{\pi - 2}{4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1}.$$

Partie III

Soit la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + x}.$$

Montrer que l'on peut définir une fonction f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$$

et prouver que cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée f' que l'on déterminera.

Partie IV

Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général suivant :

$$1) \quad a_n = \ln(n!), \quad 2) \quad b_n = \frac{1}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Pour 1), on majorera et minorera a_n par deux suites simples.