Devoir 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et A_n désigne la matrice $n \times n$ dont les coefficients réels sont donnés par

$$(A_n)_{i,j} = -1 \text{ si } i \neq j \text{ et } (A_n)_{i,i} = 2.$$

1) Montrer que la matrice A_n peut être considérée comme la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$. Dans la suite on notera q_n cette forme quadratique.

2) Cas particulier $n = 2$:

a) Exprimer $q_2(x_1, x_2)$ pour tout (x_1, x_2) pris dans $\mathbf{R}^2$.

b) Déterminer la signature de q_2, son rang et son noyau.

3) Cas particulier $n = 3$:

a) Exprimer $q_3(x_1, x_2, x_3)$ pour tout (x_1, x_2, x_3) pris dans $\mathbf{R}^3$.

b) Donner une décomposition de Gauss de q_3, préciser son rang, sa signature et son noyau.

c) Déterminer une base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle q_3 est représentée par une matrice diagonale.

4) Cas général :

a) Déterminer, en fonction de n, la signature de q_n.

b) Déterminer le noyau de q_n.

c) Donner une base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle q_n est représentée par une matrice diagonale.