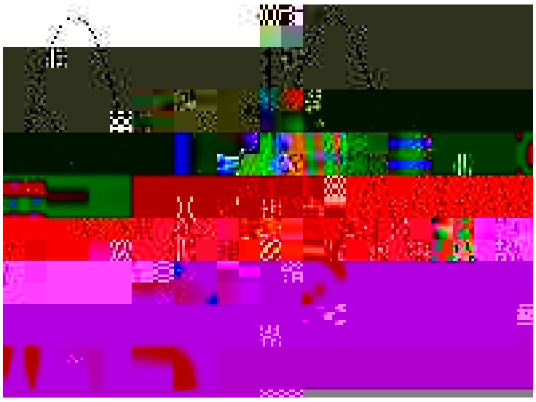
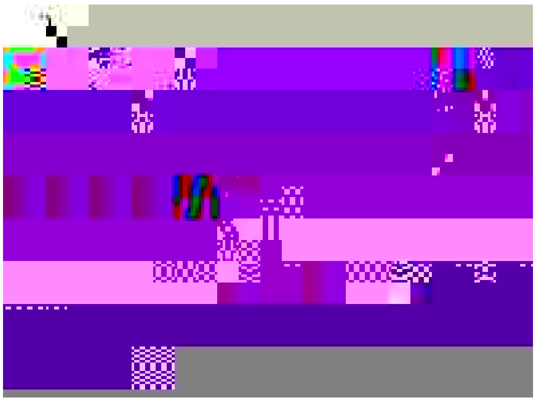
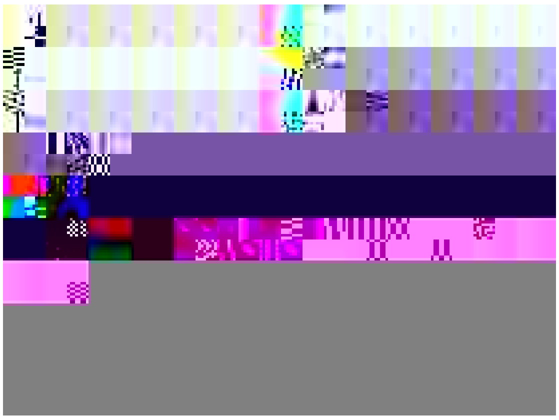
Exercice 1



Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la première question. On voit que la suite f_n converge uniformément vers 0 (le maximum de la valeur absolue de $f_n$vaut 1/n).

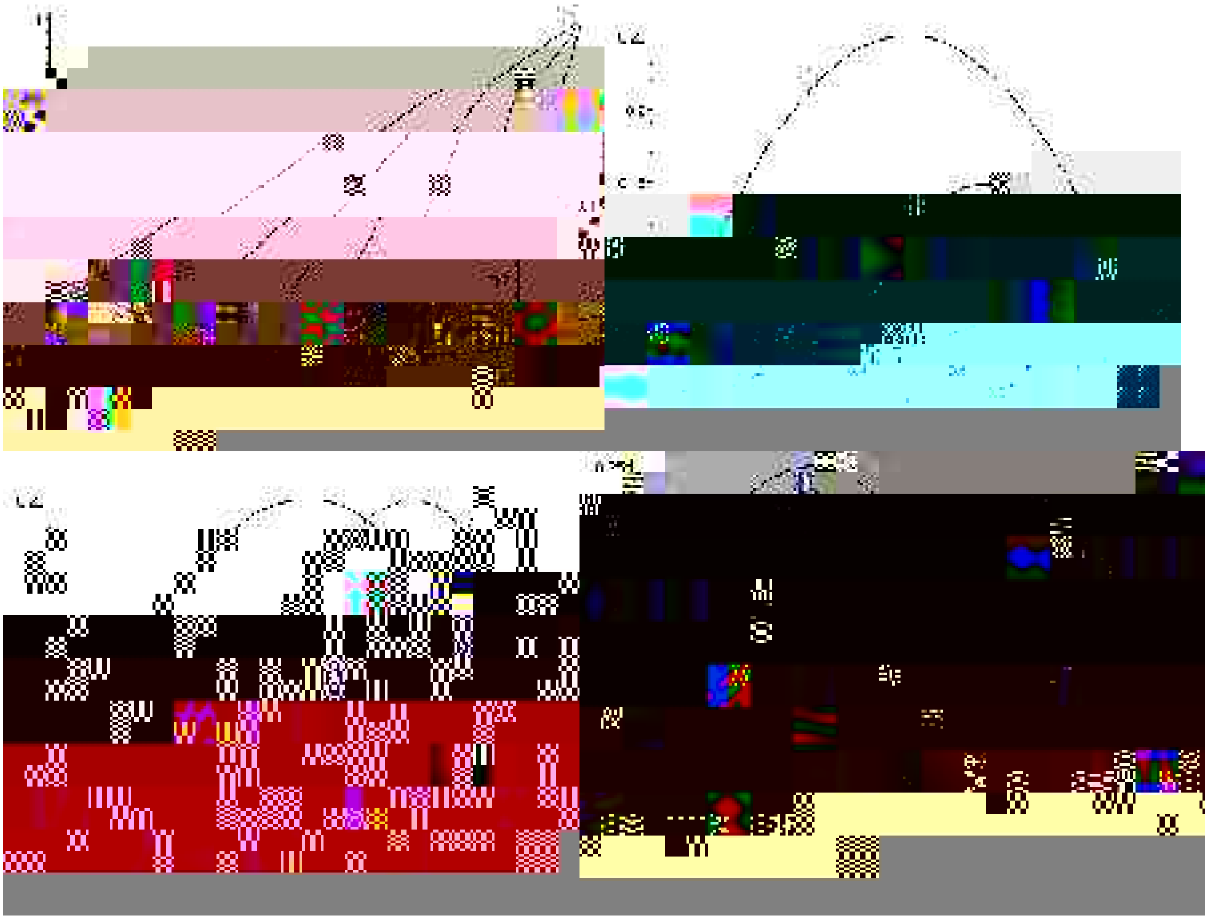


Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la deuxième question. La suite f_n converge vers ln. La convergence est uniforme: la valeur absolue de f_n(x)-ln(x), c'est à dire ln(1+1/(nx)), est plus petite que 1/nx et le maximum (pour x appartenant à [1,+infini[) de 1/nx est 1/n.



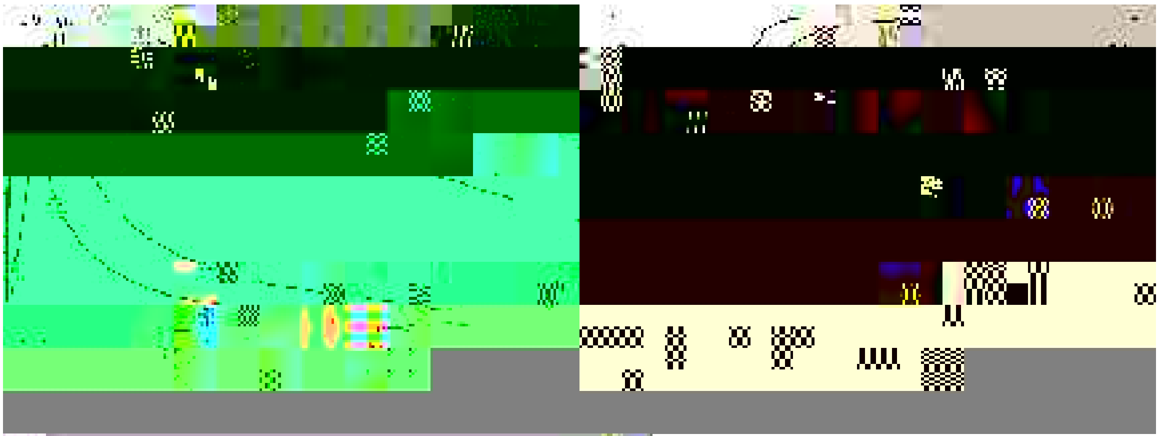
Ce sont les fonctions f_1, f_2 et f_5 de la troisième question (la courbe de f_5 remonte jusqu'à 5). La suite f_n ne converge pas: f_n(0) tend vers +infini).

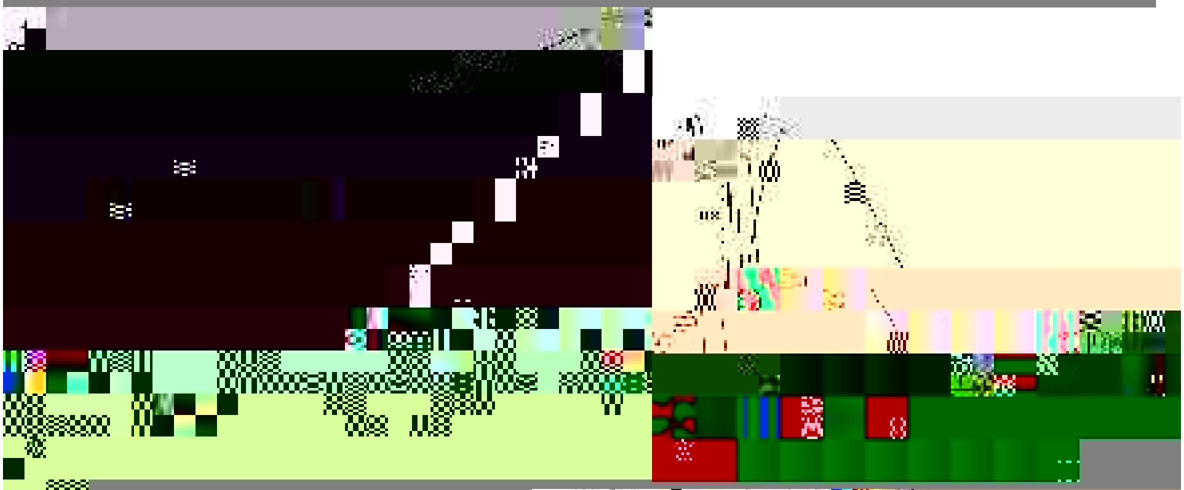
Exercice 2

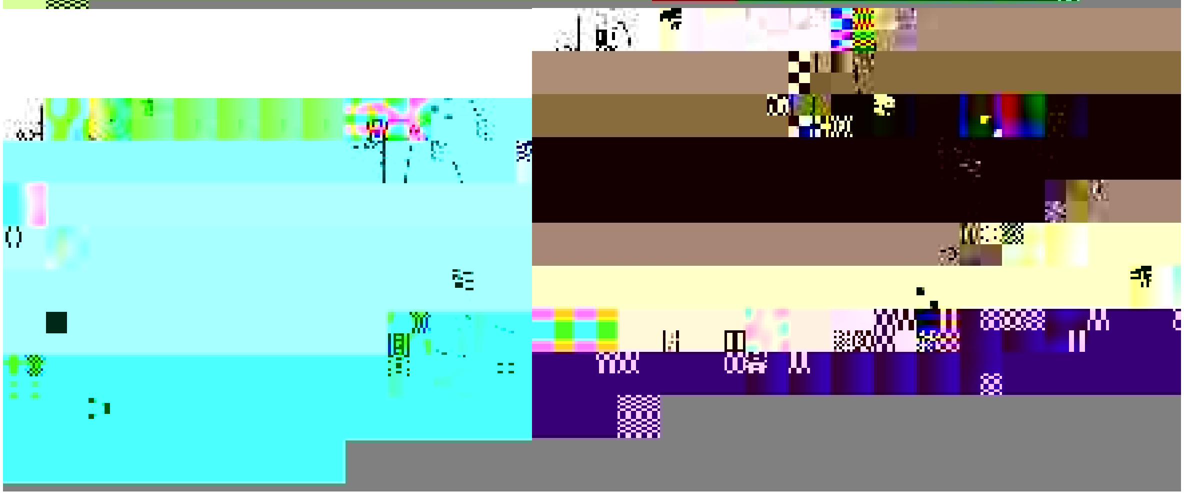


Ce sont les fonctions f_1, f_2, f_5,puis g_1, g_2, g_5, puis h_1, h_2, h_5, puis i_1, i_2, i_3. La suite f_n converge vers une fonction discontinue qui vaut 0 pour x dans l'intervalle [0,1[, et qui vaut 1 en x=1. La convergence ne peut pas être uniforme: si elle l'était, la limite de f_n serait continue.
Par contre la suite g_n converge uniformément vers 0: pour le démontrer, il faut vérifier que le maximum de la valeur absolue de g_n (c'est à dire de g_n) tend vers 0; et pour connaître ce maximum, le plus simple est de faire une étude de fonction (réponse: ce maximum vaut $n^n/(n+1)^{n+1}$, il est plus petit que $1/(n+1)$ donc tend bien vers 0).
La suite h_n converge simplement vers 0 (c'est à dire, quand l'abscisse x est fixée, l'ordonnée f(x) tend vers 0 quelle que soit la position de x dans l'intervalle [0,1]). La suite h_n ne converge pas uniformément vers 0: le maximum de h_n vaut ¼.
La suite i_n converge uniformément vers 0: comme i_n vaut x(1-x) à la puissance n, son maximum vaut ¼ à la puissance n.
Si on remplace [0,1] par [0,1[, ça ne change pas grand chose à part que f_n cette fois-ci converge simplement vers 0. Par contre si on remplace [0,1] par [0,a], avec a strictement plus petit que 1, les quatre suites de fonctions convergent uniformément vers 0.

Exercice 3

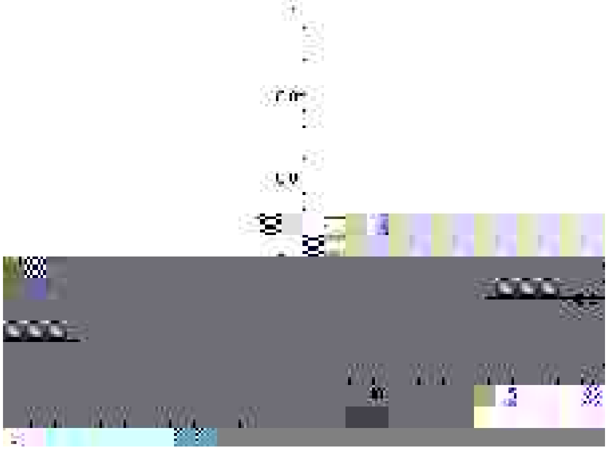






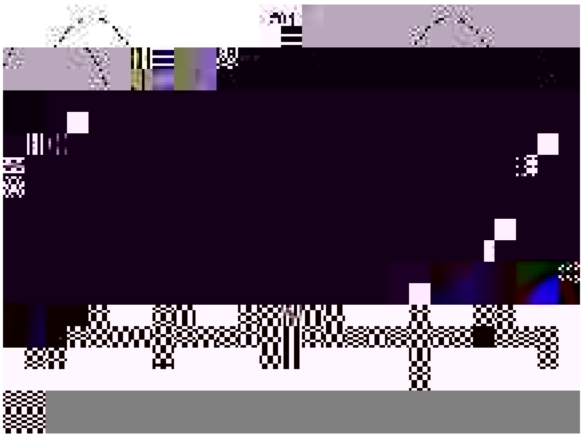
La suite f_n converge simplement vers 0, c'est à dire pour chaque x fixée on a $f(x) \to 0$; mais elle ne converge pas uniformément puisque son maximum vaut ½.
La suite g_n converge simplement vers une fonction qui vaut 1 partout sauf en x=0, pas uniformément puisque la limite est une fonction discontinue.
La suite h_n converge simplement vers la fonction h(x)=x; mais pas uniformément.
La suite i_n converge simplement vers 0; pas uniformément.
La suite j_n converge uniformément vers 0.
La suite k_n converge simplement vers 0; pas uniformément: son maximum tend vers +infini.

Exercice 4



La suite f_n converge uniformément vers 0.

Exercice 5

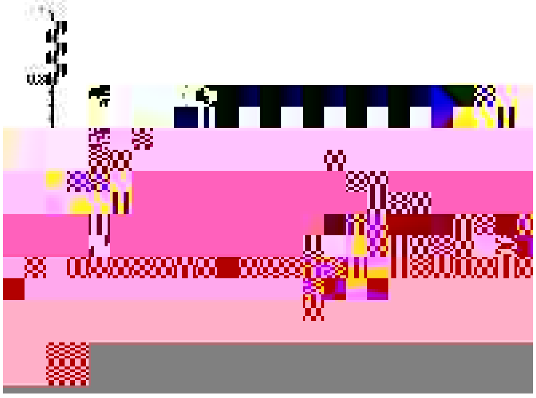


La suite f_n converge simplement vers $f(x)=x^2/2$; mais f(2nPi) vaut 0, et f(2nPi)-f(2nPi) tend vers -infini.

Exercice 6

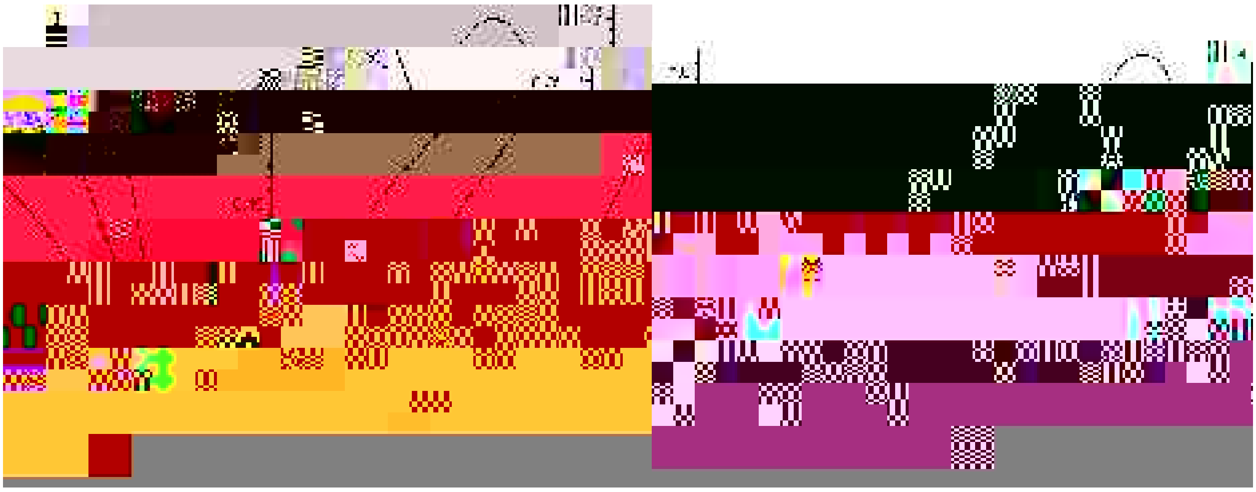
La suite f_n converge simplement vers 1 (pour x appartenant à]0,1]), mais pas uniformément, bien que $f_n(t_n)$ converge vers 1 si t_n tend vers t appartenant à]0,1].

Exercice 7



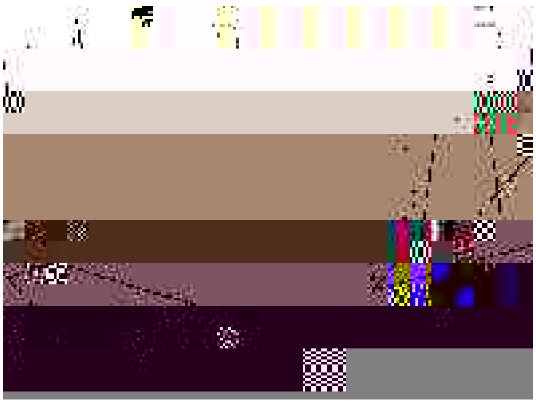
L'intégrale de la fonction e^{-nx^2}, dont on a représenté la courbe pour n=1, 2 et 3, tend vers 0 puisque cette suite de fonctions converge uniformément vers 0 quand x appartient à l'intervalle [1,2].

Exercice 8



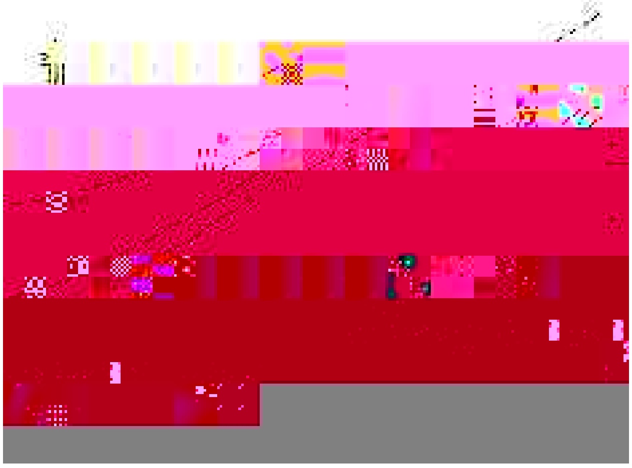
La suite f_n et la suite g_n convergent simplement vers 0. La convergence n'est pas uniforme (le maximum remonte). Ce qui les distingue, c'est que l'intégrale de la première tend vers 0 alors que l'intégrale de la deuxième tend vers 1: c'est pas l'intégrale de la limite.

Exercice 9



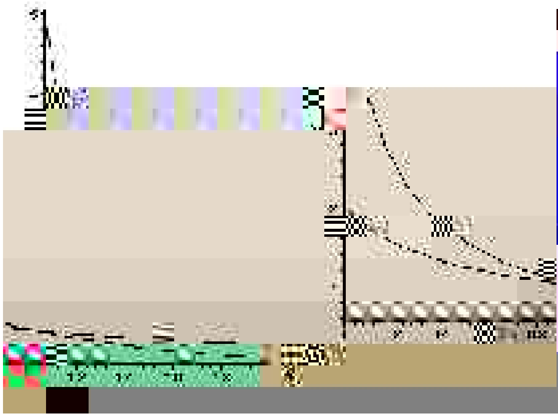
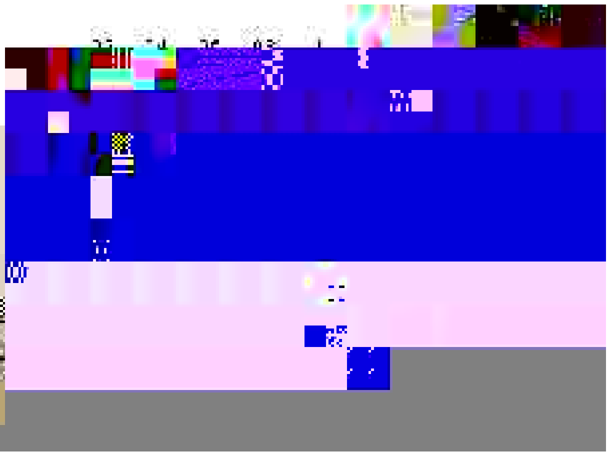
La suite h_n converge simplement vers 0. Elle ne peut pas converger uniformément: si c'étit le cas, son intégrale tendrait vers 0, or elle vaut 1.

Exercice 10



La suite $f_n(x)$=racine(x^2+1/n^2) converge uniformément vers la valeur absolue de x. Sa dérivée ne peut pas converger uniformément: si c'était le cas elle convergerait forcément vers la dérivée de la valeur absolue de x, or la valeur absolue de x n'est pas dérivable en x=0.

Exercice 11

La suite f_n (à gauche) ne converge pas simplement parce que $f_n(0)$ tend vers +infini.
La suite f'_n (à droite) ne converge pas simplement parce que $f_n(0)$ tend vers -infini.
Mais sur l'intervalle [a,+infini[avec a>0, la suite f_n converge uniformément vers la fonction $f(t)=1/t$ et la suite f'_n vers $f'(t)=-1/t^2$.