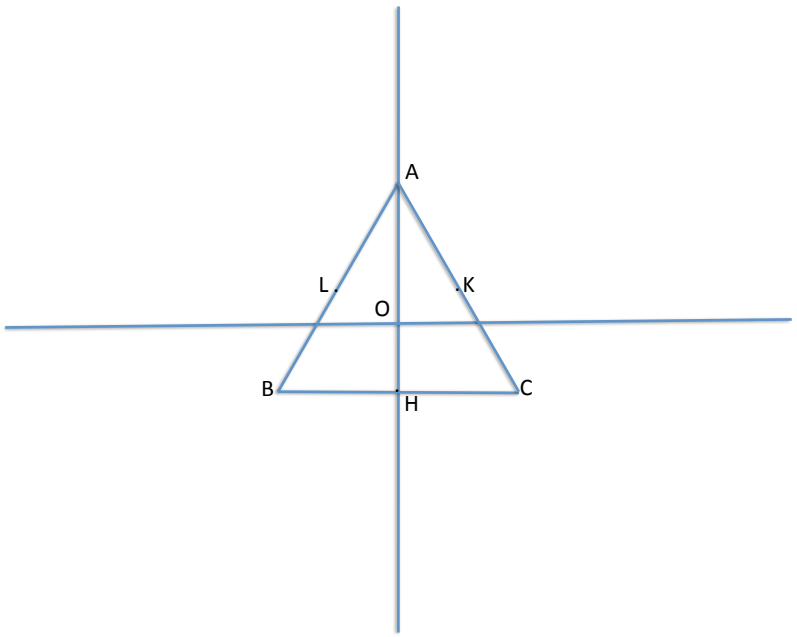
MATHEMATIQUES POUR PC 2
Planche 2 : Groupes

***Exercice* 0.1** Les six isométries qui conservent le triangle équilatéral sont l'identité Id, la rotation R_1 d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la rotation R_2 d'angle $\frac{4\pi}{3}$, la symétrie S_A par rapport à la hauteur AH, la symétrie S_B par rapport à la hauteur BK, la symétrie S_C par rapport à la hauteur CL.



a) Remplir la table de composition de ces isométries :

$\circ$	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
Id						
R_1						
R_2						
S_A						
S_B						
S_C						

et vérifier qu'elles forment un groupe.

b) Vérifier que les restrictions à $\{A, B, C\}$ de ces isométries forment le groupe des permutations de l'ensemble $\{A, B, C\}$.

***Exercice* 0.2** *Entiers modulo* 6

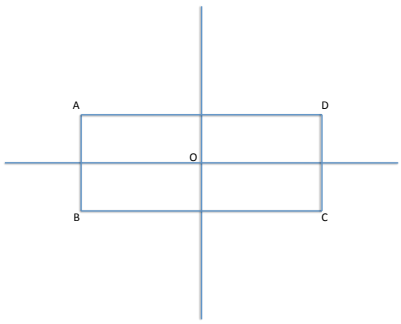
a) On notera $6\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de 6. Démontrer que c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (pour l'addition).

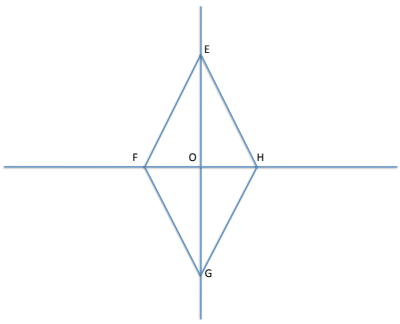
b) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ on notera $\dot{a}$ l'ensemble des entiers $a+6k$, où $k \in \mathbb{Z}$. Remplir la table d'addition (où on pose que $\dot{a}\dot{+}\dot{b} = \dot{c}$ si $a + b = c$ modulo 6 ; on choisira c dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) :

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$						
$\dot{1}$						
$\dot{2}$						
$\dot{3}$						
$\dot{4}$						
$\dot{5}$						

Démontrer que l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$ est un groupe commutatif pour la loi de composition $\dot{+}$. Ce groupe est noté $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

***Exercice* 0.3** a) Vérifier que les isométries qui conservent le rectangle $ABCD$ sont les mêmes que celles qui conservent le losange $EFGH$.





b) Remplir leur table de composition.

c) Vérifier que les restrictions à $\{A, B, C, D\}$ (ou à $\{E, F, G, H\}$) de ces isométries forment un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ (ou $\{E, F, G, H\}$).

***Exercice* 0.4** On considère quatre applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, définies par

$$f_0(x) = x, \quad f_1(x) = -x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x}.$$

a) Remplir leur table de composition :

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0				
f_1				
f_2				
f_3				

et vérifier qu'elles forment un groupe.

b) Comparer ce groupe à celui de l'exercice 3.

***Exercice* 0.5** On suppose que deux éléments a et b d'un groupe G vérifient $ab^2 = b^3a$ et $ba^2 = a^3b$.

a) Montrer, en utilisant seulement la première égalité, que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ et $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.

b) En déduire, en utilisant la deuxième égalité, que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que a et b sont égaux à l'élément neutre de G.

***Exercice* 0.6** Montrer que les applications suivantes sont des homomorphismes entre deux groupes G_1 et G_2 qu'on précisera :

$f(x) = \ln x$,

$g(z) = |z|$,

$h(x) = \sqrt{x}$,

$k(z) = e^z$,

$\ell(z) = \bar{z}$.