

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Planche 5 : Courbes paramétrées

- Exercice 1** a) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t) = t^2 + t^4$ et $y(t) = t^3 - 3t$ pour $t \in [0, +\infty[$.
b) Vérifier que le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ est symétrique du point de coordonnées $(x(t), y(t))$ par rapport à l'axe des x .
c) Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

Quelle est la pente de la tangente au point $M_0(x(0), y(0))$ et au point $M_1(x(1), y(1))$? Quelles sont les intersections de la courbe (C) avec l'axe des x ? Placer ces points ainsi que le point $M_2(x(2), y(2))$, tracer la courbe pour $t \in [0, +\infty[$ et la compléter par symétrie par rapport à l'axe des x .

- Exercice 2** a) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin(2t)$ pour $t \in [0, \pi]$.
b) Vérifier que le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ est symétrique du point de coordonnées $(x(t), y(t))$ par rapport à l'axe des x .
c) Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

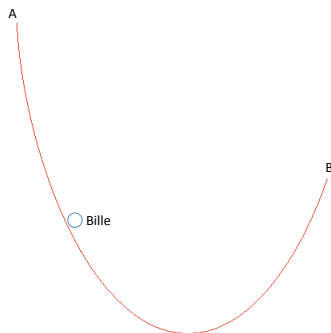
Quelle est la pente de la tangente au point $M(x(t), y(t))$ pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ et $t = \pi$? Placer ces quatre points et les quatre tangentes correspondantes, puis tracer la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et la compléter par symétrie par rapport à l'axe des x .

Exercice 3 Le *Folium de Descartes* est la courbe définie paramétriquement par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

- a) Vérifier que le point $M'\left(x\left(\frac{1}{t}\right), y\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est symétrique du point $M(x(t), y(t))$ par rapport à la bissectrice principale des deux axes.
b) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in]-1, 1]$.
c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow -1} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow -1} y(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -1} (x(t) + y(t))$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
d) Tracer la courbe paramétrée par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in]-1, 1]$, puis la compléter par symétrie par rapport à la bissectrice.

Exercice 4 On sait que le plus court chemin pour aller d'un point A à un point B est la ligne droite. Mais ce n'est pas le chemin le plus rapide pour une bille qui roulerait sans frottement de A vers B :



On démontre (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone) que la forme de la courbe qui permet à la bille d'atteindre B le plus rapidement possible est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$$

Faire le tableau de variations et tracer la courbe pour $t \in [0, 2\pi]$ (les pentes des tangentes aux bornes sont $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ et $\lim_{t \rightarrow 2\pi} \frac{y'(t)}{x'(t)}$).