MATHEMATIQUES POUR PC 2
Planche 8 : Espaces vectoriels

Exercice 1 a) Trouver une relation entre les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c'est à dire trouver trois réels x, y, z non tous nuls tels que $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

b) Démontrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants (ne vérifient pas de relation).

c) Trouver les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 2 Soit les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$,$V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

a) Trouver deux réels α, β tels que $V_4 = \alpha V_1 + \beta V_3$ et deux réels γ, δ tels que $V_5 = \gamma V_2 + \delta V_3$.

b) Trouver quatre réels a, b, c, d (non tous nuls) de façon que les quatre coordonnées de chacun des vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 vérifient l'équation $ax + by + cz + dt = 0$.

Exercice 3 Démontrer que le sous-espace vectoriel F engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et le sous-espace vectoriel G engendré par $W_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, sont tous les deux égaux à l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - y - z = 0$.

Exercice 4 a) Soient V_1, V_2, V_3 trois vecteurs linéairement indépendants. Peut-on dire que $V_1 + V_2$, $V_2 + V_3$, $V_3 + V_1$ sont linéairement indépendants ?

b) Soient V_1, V_2, V_3, V_4 quatre vecteurs linéairement indépendants. Peut-on dire que $V_1 + V_2$, $V_2 + V_3$, $V_3 + V_4$, $V_4 + V_1$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 5 Soit a un réel fixé. Démontrer que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants sauf si $a = 1$. Quel est le rang de la famille $\{V_1, V_2, V_3\}$?