

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Planche 9 : Applications linéaires et déterminants

Exercice 1 Soient f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et g une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, définies par

$$f(V) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix} \text{ pour tout } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$g(W) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix} \text{ pour tout } W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Vérifier que f est linéaire, c'est à dire vérifier les relations $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$ et $f(\lambda V) = \lambda f(V)$. Faire de même pour g .

b) Déterminer une base du noyau de f , c'est à dire une base de l'ensemble des vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $f(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Faire de même pour g .

c) Déterminer une base de l'image de f , c'est à dire de l'ensemble des $f(V)$ quand V varie dans $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de l'image de g .

Exercice 2 On appelle e_1, e_2, e_3 les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f une application linéaire qui vérifie $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = e_3 + e_1$. Calculer $f(V)$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(V) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ ax-y \end{pmatrix} \text{ pour tout } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

où a est un réel fixé. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .

Exercice 4 a) Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(V) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x-2y \\ 4y-2x \end{pmatrix} \text{ pour tout } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calculer $f(f(V)) - f(V)$.

b) En déduire que l'application g définie par $g(V) = 2f(V) - V$ est involutive c'est à dire $g(g(V)) = V$ pour tout $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Une matrice $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ vérifie $aA^3 + bA^2 + cA + dI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre réels

et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose $d \neq 0$, démontrer que le déterminant de A n'est pas nul (*indication : calculer d'abord le déterminant de la matrice $A(-aA^2 - bA - cI)$ en fonction de d*).

Exercice 6 Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$ et celui de $\begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & u \\ -y & -t & 0 & v \\ -z & -u & -v & 0 \end{pmatrix}$.