Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

MATHEMATIQUES 02

Première session – 18 Décembre 2013

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) $\quad 1 + z^3 + z^6 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que z est solution si et seulement si $\overline{z}$ est solution.

Réponse : $1 + z^3 + z^6 = 0$ est équivalent à

$$\overline{1 + z^3 + z^6} = \overline{0} = 0$$

donc à

$$1 + \overline{z}^3 + \overline{z}^6 = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + X + X^2 = 0$ (penser à la somme d'une suite géométrique).

Réponse : $1 + X + X^2 = \dfrac{X^3 - 1}{X - 1}$. Les solutions de $1 + X + X^2 = 0$ sont donc celles de $X^3 - 1 = 0$, sauf $X = 1$. Comme on le sait, les trois solutions de $X^3 - 1 = 0$ sont $X = 1$, $\boxed{X = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $\boxed{X = e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

3. Donner l'écriture géométrique (avec l'exponentielle) de toutes les solutions de (E).

Réponse : $\boxed{z = e^{i\frac{2k\pi}{9}}}$, $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$.

EXERCICE 2

1. Soient les nombres $7^5 - 1$ et $7^5 + 1$ écrits en base décimale. Les écrire en base 7.

Réponse : 66666 et 100001.

2. Soit le nombre 222 écrit en base 3. Donner son écriture en base décimale.

Réponse : 26.

EXERCICE 3

Soient a et b deux entiers positifs tels que $ab = 2688$ et $\mathrm{pgcd}(a; b) = 8$. On note que $2688 = 64 \times 42$.

1. Décomposer 2688 en facteurs premiers.

Réponse : $2^7 \times 3 \times 7$.

2. Donner a et b sachant que $4a < b < 5a$.

Réponse : $a = 3 \times 8$ et $b = 14 \times 8$.

3. Donner un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$.

Réponse : $u = -1$ et $v = 1$.

4. En déduire l'ensemble de tous les couples (u, v) d'entiers relatifs tels que $6u + 7v = 1$.

Réponse : $u = -1 + 7k$ et $v = 1 - 6k$.

EXERCICE 4

Soit $n > 0$ un entier.

1. Question de cours.

Soit $d > 0$ un entier. Que signifie : d est le plus grand commun diviseur de $2n + 1$ et $3n + 1$?

Réponse : d divise $2n+1$ et $3n+1$ et c'est le plus grand entier qui divise à la fois $2n+1$ et $3n+1$.

2. Montrer que $2n+1$ et $3n+1$ sont premiers entre eux.
Réponse : Un entier positif k qui divise à la fois $2n+1$ et $3n+1$, divise $(3n+1)-(2n+1)$ qui vaut n. Il divise donc $2n+1-2n$ c'est à dire 1, cet entier k vaut 1.

Exercice 5

Soit (P) le plan de l'espace euclidien contenant les points $A(1;-1;0)$, $B(2;1;1)$ et $C(3;1;-1)$.

1. Donner les coordonnées du point D tel que $(ABCD)$ soit un parallélogramme.
Réponse : $(2;-1;-2)$.

2. Calculer l'aire du parallélogramme $(ABCD)$.
Réponse : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \sqrt{29}$.

3. Soit θ l'angle aigü et non-orienté entre les droites (AB) et (BC). Montrer que $\pi/6 < \theta < \pi/2$.
Réponse : C'est parce que le sinus de cet angle vaut $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{30}}$.

4. Donner une équation cartésienne du plan contenant le parallélogramme $(ABCD)$.
Réponse : $-4x+3y-2z+7=0$.

5. Donner une équation paramétrique de la droite (D) orthogonale au plan contenant $(ABCD)$ et passant par le point C.
Réponse :

$$\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 1+3t \\ z = -1-2t \end{cases}$$

6. Donner la distance de l'origine $O(0;0;0)$ au plan contenant $(ABCD)$.
Réponse : $\dfrac{7}{\sqrt{29}}$.

Exercice 6

On rappelle que $a! = a \times (a-1) \times (a-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$, pour tout entier $a > 0$, et $0! = 1$. D'autre part, pour n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial est l'**entier positif**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Montrer que $(2a)!$ est un multiple de $(a!)^2$, pour tout entier positif a (exprimer C_n^k pour des valeurs appropriées de n et k).
Réponse : $C_{2a}^a = \dfrac{(2a)!}{(a!)^2}$ étant entier, $(2a)!$ est un multiple de $(a!)^2$.

2. En déduire que $2a(2a-1)(2a-2)\dots(a+2)(a+1)$ est un multiple de $a!$.
Réponse : $C_{2a}^a = \dfrac{2a(2a-1)(2a-2)\dots(a+2)(a+1)}{a!}$ étant entier, $2a(2a-1)(2a-2)\dots(a+2)(a+1)$ est un multiple de $a!$.

3. Montrer que $n!$ divise $(a+1)(a+2)\dots(a+n)$.
Réponse : $C_{a+n}^a = \dfrac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}$ étant entier, $(a+1)(a+2)\dots(a+n)$ est un multiple de $n!$.