## Intégrales et dérivées

QUESTION 1

La dérivée de $(t+1)e^{-t}$ est $\boxed{-te^{-t}}$ .

$$\int_{-1}^{t} xe^{-x}\ dx = \boxed{-(t+1)e^{-t}} \ .$$

La dérivée de $t\ln t - t$ est $\boxed{\ln t}$ .

$$\int_{1}^{2} \ln x\ dx = \boxed{2\ln 2 - 1} \ .$$

QUESTION 2

$$\int_{1}^{t} \frac{1}{x^2}\ dx = \boxed{1-\tfrac{1}{t}} \ .$$

La dérivée de $\dfrac{t}{1+t^2}$ est $\boxed{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}$ .

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\ dx = \boxed{\tfrac{\ln 2}{2}} \ .$$

QUESTION 3

La dérivée de $\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ est $\boxed{-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)}$ .

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\ dt = \boxed{0} \ .$$

La dérivée de $\ln(\cos t)$ est $\boxed{-\frac{\sin t}{\cos t}}$ pour $t \in \boxed{\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ .

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\ dx = \boxed{\ln 2} \ .$$

## Calcul de limites

QUESTION 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = \boxed{+\infty}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \boxed{+\infty}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \boxed{0}$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \boxed{0}$ .

QUESTION 2

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\frac{1}{x}}{x+1} = \boxed{2}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \boxed{1}$ .

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \boxed{-2}$ .

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x+1}{x^2-1} = \boxed{+\infty}$ .

QUESTION 3

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = \boxed{+\infty}$ .

$\lim\limits_{x\to0} x\ln x = \boxed{0}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \boxed{0}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\left(x+e^x\right) = \boxed{1}$ .

**Pratique de l'intégration par parties**

Étant donnés $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques, on se propose de calculer les deux intégrales suivantes:

$$A = \int_a^b xe^{2x}\, dx \quad \text{et} \quad B = \int_a^b x^2e^{2x}\, dx.$$

QUESTION 1

En intégrant par parties avec $u' = e^{2x}$ et $v = x$ on obtient

$$A = \left[ \boxed{x\frac{e^{2x}}{2}} \right]_a^b - \int_a^b \boxed{\frac{e^{2x}}{2}\, dx} \; .$$

La valeur de $A$ est donc $\boxed{\frac{e^{2b}}{4}(2b-1) - \frac{e^{2a}}{4}(2a-1)}$ .

En intégrant par parties avec $u' = x$ et $v = e^{2x}$ on obtient

$$A = \left[ \boxed{\frac{x^2}{2}e^{2x}} \right]_a^b - \int_a^b \boxed{x^2e^{2x}\, dx} \; .$$

La valeur de $B$ est donc $\boxed{\frac{e^{2b}}{4}(2b^2-2b+1) - \frac{e^{2a}}{4}(2a^2-2a+1)}$ .

QUESTION 2

En utilisant les résultats de la question précédente,

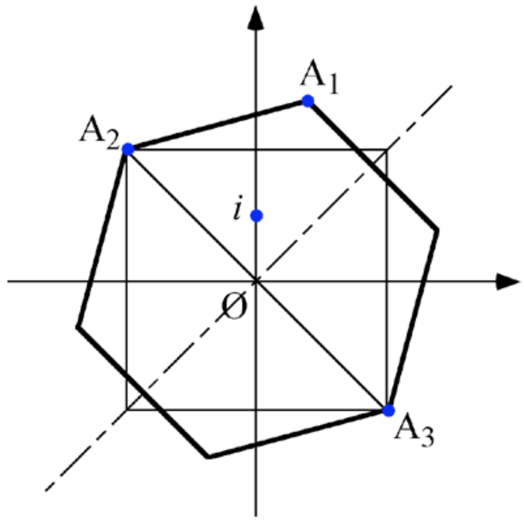
$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\, dx = \boxed{\frac{1}{4}}$ ,

$\int_0^1 x^2e^{2x}\, dx = \boxed{\frac{e^2-1}{4}}$ ,

$\int_0^x (t^2+t)e^{2t}\, dt = \boxed{\frac{x^2}{2}e^{2x}}$ .

**Nombres complexes : forme exponentielle et algébrique**

Sur la figure ci-dessous sont tracés un carré de coté 4 centré au point $O$, ainsi qu'un hexagone régulier ayant deux sommets communs avec le carré. On note $z_1, z_2, z_3$ les affixes respectifs des points $A_1, A_2, A_3$.




**Question 1 –** Écrire les nombres complexes $z$ proposés sous forme exponentielle, c'est à dire sous la forme

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

**Question 2 –** Écrire les nombres complexes $z$ proposés sous forme exponentielle ($z = |z|e^{i\theta}$) puis sous forme algébrique ($z = x + iy$).

QUESTION 1

On a $z_2 = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ et $z_3 = \boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ .

L'argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{OA_2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{OA_1}}$ .

D'où $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$ , $\dfrac{z_1}{z_2} = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ et $z_1 = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$ .

QUESTION 2

$$\frac{z_2 z_3}{2} = \boxed{4e^{i\frac{\pi}{2}}} = \boxed{4i}\ , \quad \frac{z_1}{z_2} = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \boxed{\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}}\ ,$$

$$\frac{1+i}{z_1} = \boxed{\tfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \boxed{\tfrac{\sqrt{3}}{4} - \tfrac{1}{4}i}\ , \quad (z_1 + z_3)^3 = \boxed{16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \boxed{16 + 16i}\ .$$