

1 Exercices

Exercice 1 1) Résoudre les équations différentielles :

a) $y' = 2y + x^3$

b) $y'' + y' + 5y = \cos x + 2\sin x$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles :

a) $y' = 5y + x^2 - x + 3$

b) $(1 - x^3)y' - 3x^2y = \ln x$; on précisera le ou les intervalles de résolution

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles :

E₁ : $xy' + 3y = 0$, avec $y(2) = 1$

E₂ : $x'' + 2x' + 5x = \cos 2t + 2\sin 2t$, avec les conditions : $x(0) = 1$; $x'(0) = -1$

Exercice 4) Résoudre les équations différentielles :

a) $y' = -3y + e^{5x}$

b) $x' - 2tx = (1 - 2t)e^t$

c) $y'' + y' + y = x^2$

d) $y'' + 2y' - y = \sin x + \cos x$

1.1 Autres exemples

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 3y = 3\sin x + \cos x$$

Solution 1 L'équation homogène a pour solutions :

$$z(x) = K \exp(-3x)$$

K réel quelconque, conformément au cours.

Une solution particulière évidente est $y_0(x) = \sin x$

Les solutions de l'équation sont

$$y(x) = z(x) + y_0(x) = \sin x + K \exp(-3x), K \text{ réel quelconque.}$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$x' + 2x = t^2$$

L'équation homogène a pour solutions :

$$z(t) = K \exp(-2t), K \text{ réel quelconque,}$$

Une solution particulière est $x_0(t) = at^2 + bt + c$:

On obtient par identification :

$$x_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

Et donc :

Les solutions de l'équation sont :

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + K \exp(-2t)$$

Exercice 5 D'après le livre :

Le Pouce du Panda, Stephen Jay Gould

Dans le livre on lit :

La variation du poids du cerveau chez certains mammifères est $\frac{2}{3}$ de celle du poids du corps :

x = Poids du corps

y = poids du cerveau

$$\frac{2}{3} \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y}, \text{ soit,}$$

$$\frac{2}{3} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

L'équation différentielle est séparable, elle équivaut à

$$\frac{2}{3} y = x \frac{dy}{dx} = xy', \text{ donc}$$

$$xy' - \frac{2}{3}y = 0$$

Résoudre cette équation.

2 Questions courtes

Répondre Vrai ou Faux et justifier rapidement chaque réponse!

1) Soit l'équation différentielle $2y'(x) + y(x) = x$:

a) Les solutions de l'équation homogène associée sont : $y_1(x) = Ke^{-\frac{1}{2}x}$; ?

b) Les solutions de l'équation homogène associée sont : $y_1(x) = Ke^{\frac{1}{2}x}$; ?

c) Les solutions de l'équation homogène associée sont : $y_1(x) = Ke^{-2x}$; ?

d) Une solution particulière est : $y(x) = x - 2$?

e) Une solution particulière est : $y(x) = -x - 2$?

2) a) Une droite vectorielle D est définie par un vecteur directeur \vec{u} ?

\vec{u} peut être le vecteur nul ?

b) Si \vec{u} est non nul, c'est une base de D ?

c) Le vecteur nul appartient à D ?

d) Soit $F = \text{Vect}(\vec{a})$:

$$\vec{a} = (2, 1, -5)$$

Soit $\vec{u} = (4, 2, -10)$:

\vec{u} appartient à F ?

Soit $\vec{v} = (-2, -1, 0)$:

\vec{v} appartient à F ?

3 équations différentielles

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles :

a) $y' = 2y + 2e^{3x}$

b) $y'' + y' + 4y = x$