Exercices équations différentielles

1 Premier ordre

Les équations du type :

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

se résolvent sur tout intervalle I de x où les fonctions a,b,c sont définies et où a ne s'annule pas.

Les solutions de l'équation homogène associée : $a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = 0$ *sont :*

$$y_1(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)})dx$$

Une solution particulière y_0 *pourra être obtenue, si nécessaire, par méthode de Lagrange :*

Les solutions sur un tel intervalle I sont alors :

$$y(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx) + y_0(x)$$

1.1 Equations linéaires d'ordre 1

Exercice 1 *Résoudre les équations differentielles en précisant les intervalles de résolution*

1. $y' = 2y + x^2$
2. $3y\prime - y = x$
3. $u\prime + u = 2e^x$
4. $tx\prime + 2x = sint$
5. $y\prime + ytanx = sin2x$
6. $x\prime + \sqrt{2}x = \theta^2 e^\theta$
7. $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$
8. $y\prime + 3y = 3\sin x + \cos x$

Exercice 2 *Résoudre les équations différentielles :*

a) $y\prime = 2y + x^3$

b)$(1 - x^3)y\prime - 3x^2y = lnx$ *; on précisera le ou les intervalles de résolution*

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles :*

a) $x\prime + 2x = t^2$

b) $xy\prime + 3y = 0, avec\ y(2) = 1$

c) $y\prime = -3y + e^{5x}$

d) $y' + y = 2xe^x$

En situation concrète avec des notations proches de celles utilisées en physique, chimie, biologie... :

Exercice 4 *Considérons une cuve qui contient* 50 *litres d'un liquide composé de* 90% *d'eau et de* 10% *d'alcool. Un second liquide contenant* 50% *d'eau et* 50% *d'alcool est ajouté dans la cuve avec un débit de* 4 *litres par minute. En même que l'on ajoute le second liquide, un orifice permet l'évacuation de la cuve avec un débit de* 5 *litres par minute.*
1) Montrer que la fonction y qui donne le nombre de litres d'alcool qui est dans la cuve à l'instant t vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{5}{50-t}y(t) = 2$$

2) Résoudre l'équation différentielle précédente.

Exercice 5 *Chute d'un corps avec résistance de l'air : Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale ; il est soumis à son poids de module mg et à une force due à la résistance de l'air qui vaut en module Cv^2, où C est une constante (appelée coefficient de pénétration dans l'air), v étant la vitesse de l'objet à l'instant t :*

Le principe fondamental de la dynamique donne :
$m\gamma = m\dfrac{dv}{dt} = mg - cv^2$:

1) Montrer que cette équation se ramène à une équation du type : $\dfrac{du}{1-u^2} = \dfrac{g}{a}dt; a$ *constante.*

2) Résoudre cette équation après avoir vérifié que $\dfrac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}(\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{1-u})$;

Exercice 6 *Dans une réaction chimique, une quantité de produit notée [R] évolue en fonction du temps : on note v(t) la vitesse qui vaut* $v(t) = -\dfrac{d[R]}{dt}$; *par ailleurs, on sait que vitesse et quantité [R] sont liées par une équation du type :* $v(t) = k[R]^\alpha$, *où k est une constante et α un entier : écrire l'équation différentielle vérifiée par [R] et en déduire l'évolution de [R] en fonction de t.*

Exercice 7 *La quantité u d'un élément radioactif est solution d'une équation differentielle de la forme :*

$$\frac{du}{dt} = -au.$$

La demi-vie d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demi-vie de l'uranium 238 est de 4.5 10^4ans;

Calculer la constante a en fonction de la demi-vie.

Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent ?

Exercice 8 *Dans son ouvrage "Le Pouce du Panda", le paléontologue Stéphen Jay Gould affirme : (voir complément ci dessous) « Sur la courbe de mesures de poids pour divers mammifères, on peut observer que l'augmentation du poids du cerveau représente environ 2/3 de celle du poids du corps » :*

a) Montrer que cette affirmation conduit à l'équation differentielle sur $\mathbb{R}*^+$ *:*

$$(E_3) : xy' - \frac{2}{3}y = 0$$

b) Résoudre l'équation differentielle (E_3)

c) Résoudre l'équation differentielle (E_4) *:*

$$(E_4) : xy' - \frac{2}{3}y = \sqrt[3]{x^2}$$

(On rappelle que $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$*)*

Complément et proposition de lecture :

Comment traduire en équations un problème posé par un savant et exposé dans un ouvrage "grand public" ?

Stéphen Jay Gould, Le Pouce du panda le livre de poche, biblio essais.

Résumé :

Il s'agit d'étudier un passage du livre de Stéphen Jay Gould dans lequel celui-ci nous éclaire sur des similitudes entre mamifères dans différents caractères quantitatifs :

A partir d'un grand nombre de mesures, il examine la liaison entre, par exemple, le poids du corps et le poids du cerveau, dégageant ainsi des constantes .

Observation courbes Poids du corps/ poids du cerveau chez les mammifères :

(25 millions de mesures, sur mammifères allant de la souris à l'éléphant ou musaraigne à la baleine...)

Stéphen Jay Gould affirme :

1) Sur la courbe souris-éléphant on peut observer que l'augmentation du poids du cerveau est environ 2/3 de celle du poids du corps :

2) Rythme cardiaque, rythme respiratoire, horloge biologique

Sur un grand nombre de mesures, on peut observer que l'augmentation de la fréquence cardiaque représente 0.28 celle du poids du corps, et l'augmentation du rythme respiratoire représente 0.28 celle du poids du corps :

Notons PC=poids du corps

Comment traduire ces phrases en équations mathématiques, sachant que plus loin dans l'ouvrage, on trouve (p.350)

(a) rythme respiratoire=0.000047(PC)$^{0.28}$

(b) fréquence cardiaque =0.0000119(PC)$^{0.28}$

En déduire que :

Le rythme respiratoire est proportionnel à la fréquence cardiaque.

"Pour tous les mammifères, le rapport rythme respiratoire/ fréquence cardiaque est constant et vaut environ 4 "

Donc pour une respiration, il y a 4 battements de cœur.

3) Durée de vie et fréquence cardiaque.

Plus les animaux sont petits, plus leur cœur bat vite et plus leur durée de vie est brève...

Tous les mammifères ont au cours de leur vie entière (environ) 200 millions de respirations, 800 millions de battements cardiaques ; les petits animaux vivent moins longtemps mais leur battements cardiaques sont plus rapides !

L'auteur précise que le cas de l'homme est singulier puisque sa durée de vie est longue par rapport à son poids... Chance !

1.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Pour les équations du second ordre, (linéaires à coefficients constants et à second membre standard) on utilisera la résolution de l'équation homogène associée et la méthode de recherche de solution particulière adaptée au second membre : un polynôme, une fonction du type A$\cos \varpi x + B \sin \varpi x$, ou le produit par une exponentielle d'une fonction de l'un des deux types précédents.

Dans le cas où le second membre est du type A$\cos \varpi x + B \sin \varpi x$, on cherchera les solutions particulières sous les formes équivalentes : $\mathrm{y}_0(x) = a \cos \varpi x + b \sin \varpi x$ ou $\mathrm{y}_0(x) = K \cos(\varpi x + \varphi)$, sauf dans le cas où $\mathrm{i}\varpi$ est solution de l'équation caractéristique : alors $\mathrm{y}_0(x) = x(a \cos \varpi x + b \sin \varpi x)$ ou $\mathrm{y}_0(x) = Kx \cos(\varpi x + \varphi)$;

Exemple :

Définition 1 *Oscillateur harmonique :*

Un oscillateur harmonique est un système physique dont le mouvement est décrit par des équations différentielles du type :

$$y'' + 2\alpha y' + \varpi^2 y = 0$$

Si α est non nul, on dit que l'oscillateur est amorti.

Exemple : Circuit RLC La tension v(t) aux bornes d'un condensateur est solutionde l' équation différentielle :

$$LCv'' + RCv' + v = u$$

avec R, L, C paramètres et u la tension imposée par le générateur.

Exercice 9

1. $y'' + y' + y = 2x + 1$
2. $x'' + 4x = \cos 2t$
3. $x'' + \varpi^2 x = \sin 4t$; ϖ *est un paramètre.*
4. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
5. $y'' + 2y' + 5y = cos2x + 2sin2x$
6. $y'' + y' + 3y = 3x^2 + 1$.
7. $2y'' - y' - y = 4x^2 - 1$
8. $y'' + y' + y = 2x + 1$
9. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

2 Correction exercices équations différentielles

2.1 Equations du premier ordre

Solution 1 *Avec la méthode exposée dans le cours...*

1) $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + ke^{2x}$ *Car les solutions de l'équation homogène sont* $z(x) = ke^{2x}$
Pour trouver une solution particulière : On cherche une fonction du second degré

2) $y(x) = -x - 3 + ke^{\frac{1}{3}x}$ *Car les solutions de l'équation homogène sont* $z(x) = ke^{\frac{1}{3}x}$
Pour trouver une solution particulière : On cherche une fonction du premier degré

3) $u(x) = e^x + ke^{-x}$

4)$x(t) = \dfrac{sint - t\cos t}{t^2} + \dfrac{c}{t^2}$

5) $y(x) = c\cos x - 2\cos^2 x$

6) $x(\theta) = ke^{-\sqrt{2}\theta} + e^{\theta}(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\theta^2 - \frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}\theta + \frac{2}{(1+\sqrt{2})^3})$

7) Les solutions de l'équation homogène sont
$z(x) = Kexp(x^2)$
Puis :
On a comme solution particulière :
$y_0(x) = e^x$
Les solutions sont : $y(x) =$*Kexp(*x^2*)* $+ e^x$
8) L'équation homogène a pour solutions :

$$z(x) = Kexp(-3x)$$

K réel quelconque, conformément au cours.
Une solution particulière évidente est $y_0(x) = \sin x$
Les solutions de l'équation sont
$y(x) = z(x) + y_0(x) = \sin x + Kexp(-3x)$,*K réel quelconque.*

Solution 2 *a) L'équation homogène a pour solutions :*
$z(x) = Kexp(2x)$, *K réel quelconque,*
Une solution particulière est $y_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *On trouve :*
$y_0(x) = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{-3}{4}x^2 + \frac{-3}{4}x - \frac{3}{8}$
et donc les solutions sont :
$y(x) = Kexp(2x) + \frac{-1}{2}x^3 + \frac{-3}{4}x^2 + \frac{-3}{4}x - \frac{3}{8}$

b) $(1 - x^3)y\prime - 3x^2y = lnx$ *:*
Intervalles de résolution : entre 0 et 1 ; et pour x>1

Ici, on a :
$(1 - x^3)y\prime - 3x^2y$ *est la dérivée de :*

$(1-x^3)y$
Donc :
($(1-x^3)y$*)*$\prime = lnx$
Donc : $(1-x^3)y$*= xlnx-x+K..., primitives de lnx.*
Donc : $y(x) = (xlnx - x + K)/(1-x^3)$

Solution 3 *a) L'équation homogène a pour solutions :*
$z(t) = Kexp(-2t)$*, K réel quelconque,*
Une solution particulière est $x_0(t) = at^2 + bt + c$ *:*
On obtient par identification :
$x_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
Et donc :
Les solutions de l'équation sont :

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Kexp(-2t)$$

b) L'équation est homogène et a pour solutions :
$y(x) = \frac{K}{x^3}$*, K réel quelconque,*
$y(2) = 1$ *donc K = 8*
La solution est donc :

y(x)=8$\frac{}{x^3}$ *c) Les solutions de l'équation homogène sont*

$z(x) = Ke^{-3x}$
Une solution particulière est :
$y_0(x) = Ce^{5x}$ *:*
En reportant dans l'équation, on trouve
$5Ce^{5x} = -3Ce^{5x} + e^{5x}$

Donc $C = \frac{1}{8}$

Et les solutions sont :

y(x)=K$e^{-3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$

d) Les solutions de l'équation homogène sont
$z(x) = Ke^{-x}$

Puis on pose les solutions :
$y(x) = K(x)e^{-x}$
On obtient :

y(x)=($x^2 + C)e^{-x}$

Solution 4 *CUVE :*

1) A t=0, on a y=5 ; le nombre de litres de produit dans la cuve à l'instant t est 50-t puisque chaque minute, on ajoute 4 litres et on évacue 5 litres, donc la cuve se vide de t litres au bout de t minutes ; la proportion d'alcool dans la cuve à t est donc :

$\frac{1}{50-t}y(t)$

Donc sur les 5 litres éliminés par minute, le volume d'alcool éliminé par minute est :

$\frac{5}{50-t}y(t)$

On ajoute par hypothèse 2 l d'alcool par minute donc :

$y'(t) = -\frac{5}{50-t}y(t) + 2$, *d'où l'équation différentielle.*

2) On obtient les solutions de l'équation :

y(t)=-20($\frac{50-t}{50})^5 + \frac{1}{2}(50-t)$

Solution 5 *Chute d'un corps*

$m\frac{dv}{dt} = mg - Cv^2$ *équivaut à* $\frac{dv}{dt} = g(1-a^2v^2),:$ *avec* $a^2 = \frac{C}{mg}$*;en posant u=av, on obtient*

$\frac{du}{dt} = ga(1-u^2)$, *d'où* $\frac{du}{1-u^2} = gadt;$

Comme $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u})$, *on a :*

$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+u}{1-u}) = gat + K$

Comme à t=0, u=0, on a K=0 :

Donc

$$u = \frac{\exp(2gat) - 1}{\exp(2gat) + 1}$$

Donc :

$$v = \sqrt{\frac{mg}{C}}\frac{\exp(2gat) - 1}{\exp(2gat) + 1}$$

La limite quand t tend vers l'infini est $\sqrt{\frac{mg}{C}}$ *:*

Remarque

On constate donc que si deux objets de même forme géométrique (donc de même coefficient de pénétration C, par exemple deux balles identiques de forme et rayon) sont lachés en chute libre d'une hauteur assez grande, le plus lourd arrivera au sol avant l'autre puisque à partir d'un moment, ils atteindront la vitesse limite $\sqrt{\frac{mg}{C}}$*, plus prande pour l'objet le plus lourd...*

Solution 6 *réaction chimique*

De l'équation :$v(t) = -\frac{d[R]}{dt}$*, on déduit :*$k[R]^\alpha = -\frac{d[R]}{dt}$

Donc : $\dfrac{d[R]}{[R]^\alpha} = -kdt$

Donc :

$$[R]^{-\alpha+1} = (1-\alpha)(-kt+c)$$

Solution 7 *Uranium*

1) La constante a en fonction de la demi-vie :

On obtient :

u(t)=u(0) exp(-at)

Si T est la demi-vie :

u(T)=0.5u(0)

Donc

exp(-at)=0.5

Donc

$$\frac{ln2}{T} = a.$$

2) Pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent :

Il faut que :

$$u(t) = \frac{99}{100}u(O)$$

Donc

$$t = (\frac{1}{a})(ln(\frac{100}{99})$$

donc :

$$t = (\frac{T}{ln2})(ln(\frac{100}{99})$$

Solution 8 *Le Pouce du Panda*

a) Cela s'écrit :

x= Poids du corps

y= poids du cerveau

Remarque : Il s'agit donc d'une variation relative, (le paléontologue ne donne pas les détails mathématiques, l'énoncé ne le précise pas) mais la suite de l'ouvrage nous permet de le comprendre, car plus loin, et dans une situation analogue, il donne la solution, sans donner l'équation intermédiaire. . .)

Soit :

$\frac{2}{3}\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{\Delta y}{y}$*, soit,*

$$\frac{2}{3}\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

L'équation différentielle est séparable, elle équivaut à

$\frac{2}{3}y = x\dfrac{dy}{dx} = xy'$*,donc*

$$xy' - \frac{2}{3}y = 0$$

b) On la résout comme une équation séparable :

$$\frac{2}{3}\ln x + c = \ln y$$

$$y = Kx^{\frac{2}{3}} = K\sqrt[3]{x^2}$$

c) L'équation differentielle (E_4) *:*

$$(E_4) : xy' - \frac{2}{3}y = \sqrt[3]{x^2}$$

a pour solution $y = K(x)x^{\frac{2}{3}}$
Alors $y\prime = K'(x)x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}K(x)x^{\frac{-1}{3}}$
Donc : $x(K'(x)x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}K(x)x^{\frac{-1}{3}}) - \frac{2}{3}K(x)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$
Donc : $xK'(x)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$
Donc $K'(x) = \frac{1}{x}$,
donc $K(x) = \ln x + C$
Les solutions de l'équation differentielle (E_4) *sont*

$$y = (\ln x + C)x^{\frac{2}{3}}$$

2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

RESOUDRE :
1) $y" + y\prime + y = 2x + 1$
$y(x) = 2x - 1 + e^{-\frac{1}{2}x}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)) = 2x - 1 + e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \varphi))$

2)

$$x" + 4x = \cos 2t$$

On résout : $x" + 4x = 0$
On a

$$z(t) = A\cos(2t + \varphi)$$

On pose, puisque $\mathrm{i}\varpi = 2i$ *est solution de l'équation caractéristique :*
$\mathrm{x}_0(t) = t(a\cos 2t + b\sin 2t)$
On obtient

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + \frac{t}{4}\sin 2t$$

3)$x'' + \varpi^2 x = \sin 4t$; ϖ *est un paramètre.*
Premier cas : si $\varpi^2 \neq 16$ *:*

On trouve

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\varpi^2 - 16}\sin 4t$$

Deuxième cas :
$\varpi^2 = 16$
On pose puisque i$\varpi = 4i$ *est solution de l'équation caractéristique* :
$\mathrm{x}_0(t) = t(a\cos 4t + b\sin 4t)$
Alors on a, après calculs de dérivées et report dans l'équation :
$a = 0$ *et* $b = \frac{-1}{8}$
Donc les solutions sont

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{8}t\sin 4t$$

A et φ réels

4) $y" + 2y\prime + y = 2e^{-x}$
les solutions sont

y(x)=$x^2e^{-x} + (ax + b)e^{-x}$

5) $y" + 2y\prime + 5y = cos2x + 2sin2x.$
Les solutions de l'équation homogène sont
$z(x) = e^{-x}(a\cos(2x) + b\sin(2x)) = e^{-x}(A\cos(2x + \varphi))$
On pose comme solution particulière
$y_0(x) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$
On obtient aprés calculs de dérivées et report dans l'équation :
$\alpha + 4\beta = 1$ *et* -4$\alpha + \beta = 2$
Donc $\alpha = \frac{-7}{17}; \beta = \frac{6}{17}$
Les solutions sont

y(x)=z(x)+$y_0(x) = e^{-x}(A\cos(2x + \varphi)) - \frac{7}{17}\cos 2x + \frac{6}{17}\sin 2x$

6) On obtient par les méthodes habituelles :

y(x)=z(x)+$y_0(x) = e^{-x/2}(A\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x + \varphi))$*)+*$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{-1}{9}$

7) $2y" - y\prime - y = 4x^2 - 1$
Les solutions de l'équation homogène sont :
$Ae^{-x} + Be^{-x/2}$
On pose comme solution particulière
$y_0(x) = ax^2 + bx + c$
On trouve :

$y_0(x) = -4x^2 + 8x - 23$
Les solutions de l'équation sont :

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-x/2} - 4x^2 + 8x - 23$$

8)$y'' + y' + y = 2x + 1$

y(x)=2x-1+$e^{-\frac{1}{2}x}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$*Soit :*

2x-1+$e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \varphi))$

9) $y" + 2y' + y = 2e^{-x}$
les solutions sont
$y(x) = x^2e^{-x} + (ax + b)e^{-x}$,*a et b réels*