Equations différentielles

L1 SPC, semestre 2

Année 2012

1 Généralités

Qu'est ce qu'une équation. De façon générale, une équation est une égalité faisant intervenir une inconnue (ou plusieurs inconnues). Résoudre une telle équation signifie trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui satisfont l'équation.

Questions de notations. On notera génériquement x la variable, $y : x \to y(x)$ la fonction inconnue, et y', y'' ses dérivées première et seconde. Si nécessaire, on notera $y^{(n)}$ la dérivée n-ième de y pour $n > 2$. On utilisera parfois les notations de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = y' \ , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \ , \quad \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} \ .$$

Dans des applications, x peut être remplacée par des noms de variables plus pertinents (t pour le temps par exemple).

Qu'est ce qu'une équation différentielle. Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue y et ses dérivée y', y'',..., de la forme

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \ .$$

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation n auquel la fonction inconnue a été soumise. Résoudre une équation différentielle (on parle aussi d'intégrer l'équation) signifie en trouver toutes les solutions, ainsi que leur domaine de définition. Une équation différentielle est souvent complétée par des équations supplémentaires, appelées conditions initiales, ou conditions aux bords. Imposer de telles conditions réduit la taille de la famille de solutions, jusqu'à dans certains cas aboutir à une solution unique.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste.

Exemple 1 (Primitive) *Rechercher une primitive y d'une fonction f donnée est équivalent à résoudre l'équation différentielle*

$$y' = f \ .$$

On sait que la primitive d'une fonction est définie à une constante additive près : étant donnée une primitive y, $y + c$ est aussi primitive de f quelle que soit la constante c. Pour déterminer la valeur de cette constante, on doit imposer une condition supplémentaire, par exemple une condition initiale *de la forme $y(0) = y_0$, un nombre fixé.*

Exemple 2 (Radioactivité) *En physique, un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux. On utilise t pour désigner la variable "temps" (exprimé en jours par exemple), et* *on désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t. On peut établir que la fonction N est solution de l'équation*

$$N' = -\gamma N \ ,$$

où γ est un réel positif appelé constante radioactive du corps. Il est connu que la solution est de la forme

$$N(t) = N(0)e^{-\gamma t} \ .$$

Bien que cette solution soit bien définie quelle que soit la valeur de t, on se limite naturellement à $t \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 3 (Physique Newtonienne, cas de la particule libre) *Principe fondamental de la dynamique (Newton), et notion de force. On utilise la variable t (temps), et on note x la fonction inconnue désignant la position de la particule.*

Un corps se déplace sous l'action d'une force $f : (x,t) \to f(x,t)$ dépendant du temps et de l'espace. L'équation de Newton s'écrit

$$x'' = f(x,t)$$

Cas de la particule libre : force nulle

$$x'' = 0 \Rightarrow x(t) = at + b \ .$$

L'équation en elle même a donc une infinité de solution, paramétrées par a et b. Si on impose à la solution de satisfaire des conditions initiales $x(0)$ et $x'(0)$ fixées, le mouvement est entièrement déterminé : la solution est unique.

Exemple 4 (Interaction gravitationnelle) *Deux particules, de masses m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle*

$$\begin{aligned} m_1\vec{x}_1{}'' &= \frac{Gm_1m_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2} \\ m_2\vec{x}_2{}'' &= \frac{Gm_1m_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit qu'on est en présence d'un système d'équations différentielles couplées. *A noter, le second membre diverge quand $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$, c'est à dire quand les deux particules entrent en collision.*

Exemple 5 (Mouvement d'une masse suspendue à un ressort) *Lorsque l'on néglige les frottements, la position verticale $z(t)$ d'un corps de masse m pendu à un ressort de raideur k est décrite par l'équation différentielle du second ordre*

$$mz'' + kz = 0 \ .$$

On peut montrer que la solution peut s'écrire sous les formes équivalentes suivantes

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t) \ ,$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre du mouvement, et A et φ, ou B et C sont des constantes. Elles peuvent être déterminées si on fixe les conditions initiales, c'est à dire la position et la vitesse à $t = 0$.

2 Equations du premier ordre

2.1 Problème général

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est une relation du type

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

pour une certaine fonction F.

On dit que l'équation différentielle est sous forme résolue si elle s'écrit

$$y' = G(x, y) \tag{2}$$

pour une certaine fonction G.

Trois grandes familles d'approches On peut travailler les équations différentielles sous différentes approches. On en considère généralement trois familles :

– Approche qualitative : obtenir des informations sur l'allure des solutions
– Approche numérique : obtenir des approximations des solutions, calculables sur ordinateur
– Approche analytique : obtenir des expressions explicites pour les solutions.

On se focalisera principalement sur l'approche analytique.

2.2 Domaine de définition des solutions d'une équation différentielle

La question du domaine de définition des solutions d'une équation différentielle est une question importante et parfois difficile. Une solution n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de la variable x, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6 *On considère l'équation*

$$y' = -\frac{x}{y} \; , \qquad y \neq 0 \; .$$

Pour $y \neq 0$, cette équation s'écrit aussi $(y^2)' = -2x$, soit $x^2 + y^2 = R^2$, pour une certaine constante R, qu'on supposera positive. On voit immédiatement que cette équation n'admet de solution que si $|x| \leq R$ (et aussi que la solution y ne peut excéder R en valeur absolue).

Les solutions sont donc de la forme $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, et ne sont définies que pour $|x| \leq R$.

Assez souvent, il n'est possible de résoudre une équation différentielle qu'à l'intérieur de sous-domaines dans lesquels les calculs sont possibles. La question suivante est alors de "recoller" les solutions, c'est à dire de vérifier si les solutions ainsi obtenues peuvent consetituer une solution globale.

2.3 Conditions initiales

Dans des applications à la physique ou d'autres sciences, une équation différentielle est souvent complétée par d'autres conditions, qui permettent d'assurer l'unicité de la solution.

Définition 1 (Problème de Cauchy d'ordre 1) *Un problème de Cauchy d'ordre 1 est constitué d'une équation différentielle du premier ordre sous forme résolue, du type* (2) *et d'une donnée initiale de la forme $y(x_0) = y_0$, pour certaines valeurs $x_0 \in I$ et y_0.*

Dans un certain nombre de situations, il existe des théorèmes généraux qui assurent l'existence et l'unicité de certains types de solutions de problèmes de Cauchy.

2.4 Equations linéaires du premier ordre

On se limite au cas d'une équation différentielle linéaire, sous forme résolue.

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \ . \tag{3}$$

Cette équation est inhomogène. L'équation homogène associée est

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \ . \tag{4}$$

Résoudre l'une de ces deux équations, par exemple (3), revient à chercher une fonction f, différentiable sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$,

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x) \ .$$

Exemple 7

$$y' = \alpha y \ , \qquad \textit{sur } I = \mathbb{R}^+.$$

Une telle équation modélise l'évolution d'une quantité y dont la (dé)croissance y' est proportionnelle à y. C'est le cas de

- *l'évolution temporelle d'un taux de radioactivité (dans ce cas, $\alpha < 0$).*
- *l'évolution temporelle d'une population, quand l'on suppose que le nombre de naissances et le nombre de décès sont proportionnels au nombre d'individus*
- *l'évolution d'une somme d'argent, placée sur un compte avec des intérêts fixes de taux α (dans ce cas, $\alpha \geq 0$... ou du moins on l'espère...)*
- *...*

Les solutions sont connues, et sont de la forme

$$f(t) = Ce^{\alpha t} \ ,$$

où $C = f(0)$ est une constante, appelée condition initiale.

Proposition 1 (Principe de superposition)

1. *Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (4). Pour tous scalaires λ_1, λ_2, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est aussi solution de l'équation homogène.*
2. *Soient f_1 et f_2 deux solutions d'une équation inhomogène de type (3), avec seconds membres respectifs $c_1(x)$ et $c_2(x)$. Pour tous scalaires λ_1, λ_2, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est aussi solution d'une équation inhomogène de second membre $\lambda_1 c_1(x) + \lambda_2 c_2(x)$*

Théorème 1 (Structure des solutions) *On considère les équations (3) et (4).*

1. *Soit g une solution de l'équation homogène (4). La solution générale de cette équation est nécessairement multiple de g.*
2. *Toutes les solutions de l'équation inhomogène (3) s'écrivent comme somme d'une solution particulière f_0 de l'équation inhomogène (3) et d'une solution quelconque de l'équation homogène (4).*

Par conséquent, les solutions de l'équation inhomogène (3) sont de la forme

$$f(x) = f_0(x) + \lambda g(x) \ ,$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour déterminer de façon unique la valeur de λ, une condition supplémentaire est nécessaire, par exemple une condition initiale.

Exemple 8 *L'équation $y' = -xy$ est linéaire et homogène. Les solutions sont des fonctions de Gauss, de la forme*

$$g(x) = Ce^{-x^2/2}$$

où $C = g(0)$ est une constante.

2.5 Cas où la fonction a ne s'annule pas

On suppose tout d'abord que a ne s'annule pas sur l'intervalle I considéré. On peut alors écrire (3) sur I sous la forme

$$y' = -\frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)} \tag{5}$$

et y est automatiquement continûment différentiable.

En pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre du type (3) sur un intervalle sur lequel la fonction a ne s'annule pas, on commence par résoudre l'équation homogène associée (4) puis :

– on détermine, lorsque c'est possible, une solution particulière "évidente" f_0, et la solution générale de (3) est alors $f = f_0 + g$, où g est solution de l'équation homogène associée, ou

– on utilise la méthode de Lagrange (aussi appelée méthode de variation de la constante, voir plus loin) pour trouver cette solution générale de l'équation homogène.

2.5.1 Résolution de l'équation homogène

Exemple 9 *On considère tout d'abord l'exemple simple*

$$y' = \alpha y \ ,$$

sur $\mathbb{R}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante. En supposant que y ne s'annule pas, cette équation s'écrit aussi $y'/y = \alpha$; or on sait que $y'/y = \ln(|y|)'$, de sorte que cette équation admet des solutions de la forme

$$\ln(|y(x)|) = \alpha x + \beta \ ,$$

pour une certaine constante β, soit $|y(x)| = e^{\alpha x + \beta} = e^{\beta} e^{\alpha x} = Ce^{\alpha x}$, où on a posé $C = e^{\beta}$. Si on suppose la solution continue, le signe de y est constant, et peut être absorbé par C, ce qui donne pour solution

$$y(x) = Ce^{\alpha x} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Revenons au cas général, en supposant toujours que a ne s'annule pas sur un intervalle I. On peut alors écrire (3) sous la forme

$$y' = -\frac{b(x)}{a(x)}y \tag{6}$$

Soit φ une primitive de $-b/a$, soit u définie par $u(x) = e^{-\varphi(x)}$. Alors $u'(x) = -\varphi'(x)e^{-\varphi(x)}$, et (6) s'écrit alors

$$y' - \varphi' y = 0 \ , \qquad \text{soit} \qquad uy' + u'y = 0 \ ,$$

ce qui conduit à $uy = C$, une certaine constante, donc la solution générale est

$$g(x) = Ce^{\varphi(x)} \ . \tag{7}$$

Théorème 2 *Considérons l'équation homogène* (4)*, dans un domaine I dans lequel la fonction a ne s'annule pas. Alors la solution est de la forme*

$$g(x) = C \exp\left\{ \int \frac{b(s)}{a(s)} ds \right\} \ , \tag{8}$$

où on a noté $\int \frac{b(s)}{a(s)} ds$ une primitive quelconque de la fonction b/a.

2.5.2 Résolution de l'équation inhomogène : méthode de Lagrange

Etant donnée une solution $g : x \to g(x)$ de l'équation homogène, on décide de rechercher une solution particulière de l'équation inhomogène sous la forme $f : x \to f(x) = u(x)g(x)$, pour une certaine fonction différentiable u à déterminer. Pour cela, on insère cette solution dans l'équation. On obtient alors

$$a(x)\left(u'(x)g(x) + u(x)g'(x)\right) + b(x)u(x)g(x) = c(x) \ .$$

Comme g est solution de l'équation homogène, on se ramène à

$$u'(x) = \frac{c(x)}{a(x)g(x)} \ ,$$

et le problème est résolu dès qu'on a trouvé une primitive de cette dernière fonction.

Remarque 1 *On peut noter que la solution générale de l'équation homogène étant de la forme $x \to Kg(x)$ où K est une constante, chercher des solutions sous la forme $u(x)g(x)$ revient à remplacer la constante par une fonction, et en quelque sorte à autoriser la constante à varier. C'est pour cela qu'on appelle souvent cette méthode* variation de la constante*.*

Exemple 10 (circuit RC)

$$RCy' + y = \cos(\omega_0 x) \ .$$

On vérifie facilement que la solution générale de l'équation homogène est $g(x) = Ke^{-x/RC}$, où K est une constante.

Pour ce qui est de l'équation inhomogène, avec les mêmes notations que ci-dessus (et en prenant $K = 1$), on a

$$u'(x) = \cos(\omega_0 x)/[RCe^{-x/RC}] = \frac{1}{RC}e^{x/RC}\cos(\omega_0 x) \ .$$

Reste à intégrer, en écrivant

$$u'(x) = \frac{\gamma}{2}\left(e^{(\gamma+i\omega_0)x} + e^{(\gamma-i\omega_0)x}\right) \ ,$$

où on a posé $\gamma = 1/RC$, d'où

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{e^{(\gamma+i\omega_0)x}}{(\gamma+i\omega_0)} + \frac{e^{(\gamma-i\omega_0)x}}{(\gamma-i\omega_0)}\right) \\ &= \frac{\gamma}{2(\gamma^2+\omega_0^2)}e^{\gamma x}\left((\gamma-i\omega_0)e^{-i\omega_0 x} + (\gamma+i\omega_0)e^{i\omega_0 x}\right) \\ &= \frac{\gamma}{(\gamma^2+\omega_0^2)}e^{\gamma t}\left(\gamma\cos(\omega_0 x) + \omega_0\sin(\omega_0 x)\right) \end{aligned}$$

d'où la solution particulière

$$y_0(x) = \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2}\left(\cos(\omega_0 x) + RC\omega_0\sin(\omega_0 x)\right) \ .$$

Exemple 11 (simple)

$$(\sin x)\, y' - (\cos x)\, y = x \ .$$

Equation homogène : $y'\sin(x) - y\cos(x) = 0$ est de la forme $\frac{y'}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, d'où $\ln|y| = \ln|\sin(x)| + k$, et on obtient ainsi la solution

$$g(x) = K\sin(x) \ .$$

Equation inhomogène :...

Exemple 12 (un peu plus compliqué... trop ?) Considérons l'exemple

$$(x^2+1)y' + 3xy = x \ .$$

L'équation homogène correspondante s'écrit sous la forme $y'(x)/y(x) = -3x/(x^2+1)$, et s'intègre facilement, pour donner $\ln|y(x)| = -\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\lambda|$, d'où la solution générale de l'équation homogène

$$y_0(x) = \lambda(x^2+1)^{-3/2} \ .$$

Concernant l'équation inhomogène, une solution apparente (à défaut d'être évidente) est donnée par $y_p(x) = 1/3$. On en déduit la solution générale de l'équation inhomogène

$$y(x) = \frac{1}{3} + \lambda(x^2+1)^{-3/2} \ ,$$

ce qui donne donc une famille à un paramètre de solutions.

<u>En utilisant la méthode de Lagrange :</u> on recherche une solution sous la forme

$$y(x) = \alpha(x)(1+x^2)^{-3/2} \ .$$

On a alors, compte tenu du fait que y_0 est solution de l'équation homogène, $(1+x^2)y'(x) + 3xy(x) = \alpha'(x)(1+x^2)^{-1/2}$. Imposer que y soit solution de l'équation inhomogène implique que $\alpha'(x) = x\sqrt{1+x^2}$, d'où

$$\alpha(x) = \lambda + \int_0^x t\sqrt{1+t^2}\,dt = \lambda + \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sqrt{1+u}\,du = \lambda + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \ ,$$

λ étant une constante d'intégration. Finalement, on obtient bien la solution générale

$$y(x) = \alpha(x)(1+x^2)^{-3/2} = \lambda(1+x^2)^{-3/2} + \frac{1}{3} \ .$$

2.5.3 Condition initiale

Théorème 3 *Si la fonction a ne s'annule pas sur I alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, l'équation (3) admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$.*

Exemple 10 (suite) La solution générale est de la forme

$$y(x) = Ke^{-x/RC} + \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2}\left(\cos(\omega_0 x) + RC\omega_0\sin(\omega_0 x)\right) \ .$$

Si on impose de plus $y(0) = 1$ (par exemple), ceci conduit à

$$1 = K + \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2} \ ,$$

d'où

$$K = \frac{(RC\omega_0)^2}{1+(RC\omega_0)^2} \ .$$

Plus généralement, pour un $y(0) = y_0$ quelconque, on obtient

$$K = \frac{(y_0-1)+(RC\omega_0)^2}{1+(RC\omega_0)^2} \ .$$

2.6 Cas où la fonction a s'annule

Si la fonction a s'annule en un nombre fini de points $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, on doit commencer par résoudre l'équation dans les domaines $I_k =]x_k, x_{k+1}[$, puis essayer de raccorder les solutions obtenues.

La procédure d'étude des solutions dans ce cas peut se synthétiser de la façon suivante :

- *Analyse :* On commence par appliquer la théorie précédente sur les sous-intervalles maximaux (c'est à dire les plus grands possibles) sur lesquels la fonction a ne s'annule pas. Si f est solution de sur I, on obtient ainsi des expressions pour f sur les intervalles maximaux, faisant intervenir des constantes d'intégration A_k. On détermine alors si la continuité puis la dérivabilité de f aux points d'annulation x_k de la fonction a imposent des conditions sur les constantes A_k.
- *Synthèse :* On se demande ensuite si, réciproquement, une fonction f définie par les expressions précédemment obtenues en fonction des constantes A_k est dérivable sur I et satisfait l'équation sur I.

Exemple 13 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation*

$$xy' - 3y = 0 \ .$$

La fonction $a(x) = x$ s'annule en $x = 0$. On peut donc résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Par exemple, remarquer que dans ces deux domaines, l'équation équivaut à $x^3y' - 3x^2y = 0$, puis à $(x^3/y)' = 0$. Les solutions sont donc de la forme

$$y(x) = C_+ x^3 \ , \quad x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad y(x) = C_- x^3 \ , \quad x \in \mathbb{R}^{-*} \ ,$$

pour certaines constantes $C_\pm$. Quel que soit le choix de ces constantes, la solution est toujours continue en $x = 0$. Par contre, la continuité de la dérivée impose $C_+ = C_-$.

Il peut arriver qu'il n'existe pas de solution globale, comme le montre l'exemple ci-dessous

Exemple 14 (Un exemple singulier) *On voudrait résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation*

$$xy' = 1 \ .$$

La solution est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ par

$$y(x) = \ln(|x|) + C_\pm \ ,$$

où C_+ et C_- sont des constante, a priori différentes sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Mais ces constantes ne peuvent être choisies de sorte que la solution soit continue en $x = 0$.

2.7 Systèmes différentiels

Exemple 15 (Un exemple simple) *Pour illustrer, on considère l'exemple simple suivant*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & -3y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & 2y_1 - 3y_2 \end{array} \right.$$

On peut facilement voir qu'en posant $u_1 = y_1 + y_2$ et $u_2 = y_1 - y_2$, on aboutit à un système découplé, dont les solutions sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1' & = & -u_1 \\ u_2' & = & -5u_2 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u_1(t) & = & Ae^{-t} \\ u_2(t) & = & Be^{-5t} \end{array} \right.$$

où A et B sont des constantes d'intégration, de sorte qu'au final, les solutions sont de la forme

$$\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & \frac{1}{2}\left(Ae^{-t} + Be^{-5t}\right) \ , \\ y_2(t) & = & \frac{1}{2}\left(Ae^{-t} - Be^{-5t}\right) \ . \end{array}$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées si on se donne des conditions initiales sur y_1 et y_2.

Comme on le voit, tout s'est joué sur le découplage des deux équations. Comment peut on faire pour connaître la transformation qui effectue ce découplage ? Patience...

Exemple 16 (Alcootest (d'après un problème d'Y. Colin de Verdière)) *Après ingestion d'alcool (dans l'estomac), l'alcool diffuse dans le sang et est éliminé progressivement par les reins. A partir d'un modèle simple on souhaite étudier l'évolution au cours du temps du taux d'alcool dans le sang.*

Soient $t \to x_1(t)$ le taux d'alcool dans l'estomac et $t \to x_2(t)$ le taux d'alcool dans le sang à l'instant t. On fait l'hypothèse que les vitesses de diffusion de l'alcool de l'estomac vers le sang ou du sang vers l'extérieur sont proportionnelles aux différences de concentration dans les 2 réservoirs. C'est une hypothèse naturelle, car il ne doit pas y avoir de transfert si les concentration sont les mêmes et alors le plus simple est de prendre des vitesses linéaires par rapport aux différences de concentration. (on rappelle que la concentration c d'une substance donnée est la quantité de cette substance contenue dans l'unité de volume. La quantité de substance contenue dans le volume V est donc cV).

La mise en équation de ce problème conduit au système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & -k_1(x_1(t) - x_2(t)) \\ x_2'(t) & = & k_2(x_1(t) - x_2(t)) - \kappa x_2(t) \end{array}\right.$$

où $k_1 > 0$ (resp. $k_2 > 0$) est la constante de diffusion de l'alcool de l'estomac vers le le sang (resp. du sang vers l'estomac).

Si V est le volume de l'estomac et W le volume du sang, la conservation de la quantité d'alcool dans cet échange implique $k_1 V = k_2 W$ et donc $k_2 < k_1$! La constante $\kappa > 0$ est la constante d'absorption de l'alcool par les reins. Les constantes k_1, k_2 et κ sont des paramètres qui dépendent des individus et une étude expérimentale a posteriori (i.e. utilisant les équations différentielles résolues) doit permettre de les calculer et même mieux de les déduire d'autres caractéristiques individuelles (poids, âge, etc . . .).

Il faut donc procéder comme ci-dessus, à savoir trouver une transformation qui permette de découpler les deux équations, afin de les résoudre...

3 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Les nombres complexes simplifient les choses

Pourquoi ?

- Parce que certaines équations (classiques) n'admettent pas de solution réelles, mais admettent toujours des solutions complexes : les équations du second degré par exemple.
- parce que les nombres complexes permettent d'utiliser la fonction exponentielle, la plus belle et importante des fonctions mathématiques.
- Parce que l'exponentielle, c'est plus facile que les fonctions trigonométriques et les fonctions trigo hyperboliques

Exemple 17 *Comment calculer simplement une primitive F de $f : t \to f(t) = e^{-t}\cos(2t)$? Calculer une quantité de la forme $\int_0^t e^{-s}\cos(2s)ds$ n'est pas nécessairement simple. Par contre, en remarquant que f est la partie réelle de la fonction*

$$z : t \to z(t) = \frac{1}{2}e^{-t}e^{2it} = \frac{1}{2}e^{(2i-1)t}$$

on voit facilement qu'une primitive Z de la fonction z est de la forme

$$Z(t) = \frac{1}{2(2i-1)} e^{(2i-1)t} \ ,$$

et que donc

$$f = \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}\left(\frac{dZ}{dt}\right) = \frac{d(\mathfrak{Re}(Z))}{dt} \ ,$$

d'où une primitive de f est la fonction $F : t \to F(t)$ définie par

$$F(t) = \mathfrak{Re}(Z(t)) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2(2i-1)} e^{(2i-1)t}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{-2i-1}{10} e^{(2i-1)t}\right) = \frac{e^{-t}}{10}\left(-\cos(2t) + 2\sin(2t)\right) \ .$$

3.2 Equations linéaires du second ordre

Equation inhomogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{9}$$

et équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \ . \tag{10}$$

Proposition 2 (Principe de superposition)

1. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions solutions de* (10)*. Toute combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (à coefficients λ_1, λ_2 réels comme complexes) est encore solution.*
2. *Soient f_1 et f_2 deux solutions d'une équation inhomogène de type* (9)*, avec seconds membres respectifs $d_1(x)$ et $d_2(x)$. Pour tous scalaires λ_1, λ_2, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est aussi solution d'une équation inhomogène de second membre $\lambda_1 d_1(x) + \lambda_2 d_2(x)$.*

Théorème 4 (Structure des solutions)

1. *La solution générale de l'équation inhomogène* (9) *s'écrit comme somme d'une solution particulière f_0 de l'équation inhomogène, et de la solution générale de l'équation homogène* (10)*.*
2. *La solution générale de l'équation homogène s'écrit comme combinaison linéaire de deux solutions particulières g_1 et g_2 non proportionnelles (c'est à dire telles qu'il n'existe aucun nombre K tel que $g_2(x) = K g_1(x)$ pour tout $x \in I$).*

On se focalise sur les équations à coefficients constants, c'est à dire telles que les fonctions a, b et c sont des fonctions constantes.

3.2.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition 3 *Il existe au moins une solution de l'équation homogène* (10) *de la forme $f(x) = e^{rx}$, où $r \in \mathbb{C}$ est une constante.*

En insérant dans l'équation, on aboutit à

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

et comme la fonction $x \to e^{rx}$ ne peut pas être uniformément nulle, ceci conduit à l'*équation caractéristique*

$$ar^2 + br + c = 0 \ , \tag{11}$$

dont on recherche les solutions, qui peuvent être complexes.

Cas où l'équation caractéristique admet deux racines distinctes Dans ce cas, notons r_1 et r_2 ces deux solutions. Il est clair que les fonctions $g_1(x) = e^{r_1 x}$ et $g_2(x) = e^{r_2 x}$ ne sont pas proportionnelles. D'après le théorème 4, la solution générale de l'équation homogène peut alors s'écrire

$$g(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \ .$$

Un exemple simple en détails On considère l'exemple 5 de la masse accrochée à un ressort, qui conduit à l'équation

$$mz'' + kz = 0 \ .$$

En posant $\omega_0^2 = k/m$, avec $\omega_0 > 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + \omega_0^2 = 0$, qui conduit directement à des solutions de la forme

$$z_0(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \ .$$

Remarque 2 *Si on impose que z_0 est réelle, cela entraîne des contraintes sur A et B, à savoir $B = \overline{A}$.*

Cas où l'équation caractéristique admet une racine double Notons r_1 cette racine double : $ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2$, où $r_1 = -b/2a$. On sait qu'il existe au moins une solution de la forme

$$g_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-bx/2a} \ .$$

Cherchons une seconde solution sous la forme

$$g_2(x) = u(x) g_1(x) \ .$$

On a alors

$$g_2' = u' g_1 + u g_1' \ , \qquad g_2'' = u'' g_1 + 2u' g_1' + u g_1''$$

et l'équation différentielle s'écrit alors, en regroupant les termes

$$u \left[a g_1'' + b g_1' + c g_1 \right] + u' \left[2a g_1' + b g_1 \right] + a u'' g_1 = 0$$

Comme g_1 est solution de l'équation homogène, le premier terme est nul ; de plus, $g_1'(x) = r_1 g_1(x) = -b g_1(x)/2a$, de sorte que le second terme est nul lui aussi. Au final, l'équation se simplifie en $a u'' g_1 = 0$, ce qui implique que u est une fonction affine. La solution est donc de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$ pour certaines constantes α et β, et on voit que α est nécessairement non nul. Une solution indépendante de g_1 est donc par exemple $g_2(x) = x g_1(x)$.

3.2.2 Résolution de l'équation inhomogène

Dans un certain nombre de cas, on peut trouver une solution particulière de l'équation inhomogène en la recherchant sous une forme qui "ressemble" au second membre. Ceci peut se justifier rigoureusement dans certaines situations, mais aussi parfois par des considérations physiques. Par exemple, dans les équations déduites de l'application des lois de Newton, le second membre peut souvent être interprété comme une force extérieure, et on peut s'attendre à ce que le comportement de la solution soit dicté par cette force extérieure.

Un cas particulier intéressant est donné par la situation suivante

Proposition 4 *Soit*

$$ay'' + by' + cy = P(x) e^{kx}$$

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, P étant un polynôme dont on note $d^\circ(P)$ le degré.

– *Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme*

$$y(x) = Q(x)e^{kx} \ , \quad \textit{avec} \quad d^\circ(Q) = d^\circ(P).$$

– *Si k est racine simple de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme*

$$y(x) = Q(x)e^{kx} \ , \quad \textit{avec} \quad d^\circ(Q) = d^\circ(P) + 1 \ .$$

– *Si k est racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme*

$$y(x) = Q(x)e^{kx} \ , \quad \textit{avec} \quad d^\circ(Q) = d^\circ(P) + 2 \ .$$

Un exemple simple en détails (suite) On reprend l'exemple 5 que l'on modifie en ajoutant un second membre, dans deux situations différentes

Exemple 18 *On prend tout d'abord un second membre de la forme $f(t) = te^{-\alpha t}$, où α est un réel positif, ce qui conduit à l'équation*

$$mz'' + kz = te^{-\alpha t} \ .$$

D'après ce qui précède, les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i\omega_0$, donc comme $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha$ ne peut être égal à l'une de ces racines. On peut donc chercher une solution sous la forme

$$u(t) = (at + b)e^{-\alpha t} \ ,$$

et identifier la valeur de a et b.

Exemple 19 (Résonateur d'Helmholtz) *On prend maintenant un second membre de la forme $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, ce qui conduit à l'équation*

$$mz'' + kz = \cos(\omega_0 t) \ .$$

On a alors un phénomène de résonance : *la solution oscille avec une pulsation ω_0, mais l'amplitude des oscillations croît linéairement avec le temps : $z(t) = At\cos(\omega_0 t)$.*

La résonance, ça peut être dangereux, comme le montre l'exemple du pont de Tacoma (USA) :
http ://www.youtube.com/watch ?v=uhWQ5zr5_xc

3.2.3 Conditions initiales, conditions aux bords

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, une équation différentielle admet généralement une infinité de solutions, et l'unicité n'est obtenue qu'en imposant des conditions supplémentaires.

Problème de Cauchy Dans le cas du problème dit *problème de Cauchy*, deux conditions initiales $y(0) = u_0$ et $y'(0) = v_0$ permettent généralement d'obtenir une solution unique.

Problème aux bords Ca n'est pas toujours si simple...

Exemple 20 (Particule quantique dans un puits de potentiel)

$$y'' + Ey = 0 \qquad \textit{dans le domaine} \quad [0, L]$$

avec des conditions au bord

$$y(0) = y(L) = 0 \ .$$

Si on suppose $E > 0$, ce problème n'a de solution que pour certaines valeurs particulières de E. En effet, la solution générale est de la forme

$$y(x) = Ae^{ix\sqrt{E}} + Be^{-ix\sqrt{E}} \ .$$

La condition $y(0) = 0$ impose $B = -A$, et la condition $y(L) = 0$ impose $2iA\sin(L\sqrt{E}) = 0$, qui n'a de solution non nulle que si E est de la forme $E = (k\pi/L)^2$, pour $k \in \mathbb{Z}$.