Équation de la chaleur.

On considère une barre métallique homogène d'extrémités A et B assimilée au segment $[AB]$. Les points de la droite (AB) sont repérés par leurs coordonnées dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB})$: ainsi on peut considérer que la température est une application $(t,x)\ \mapsto\ T(t,x)$ qui dépend à la fois de la position $0\le x\le 1$ et du temps t. La fonction T est régie par l'équation de la chaleur

$$\partial_t T(t,x)=\partial_x^2 T(t,x)\ ;$$

ici ∂_t désigne la dérivée par rapport au temps et ∂_x^2 la dérivée seconde par rapport à x (la constante de *diffusivité thermique* est prise égale à 1). À linstant $t=0$ la température de la barre en $0\le x\le 1$ est $\psi(x)$ et on suppose que les extrémités A et B sont en contact avec de la glace, de sorte que

$$\psi(0)=\psi(1)=0.$$

On se propose de trouver une solution $(t,x)\ \mapsto\ T(t,x)$ (suffisamment régulière) du problème suivant :

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} (\mathbf{C0})\ :\quad \forall (t,x)\in]0\,;+\infty[\times[0\,;1],\ \partial_t T(t,x)=\partial_x^2 T(t,x)\ ; \\ (\mathbf{C1})\ :\quad \forall t\in[0\,;+\infty[,\ T(t,0)=T(t,1)=0\ ; \\ (\mathbf{C2})\ :\quad \forall x\in[0\,;1],\ T(0,x)=\psi(x). \end{cases}$$

On cherche une solution de $(\mathcal{P})$ sous la forme $T(t,x)=f(t)g(x)$ et on fait l'hypothèse $(\mathcal{H})$ que ψ s'écrit sous forme d'une série de Fourier ***uniformément convergente***, soit

$$(\mathcal{H})\ :\quad \psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin(2\pi n x).$$