Étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel $x \in]0\,;2\pi[$ on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$$

On se propose d'établir par récurrence la formule

$$S_n(x) = T_n(x) + \frac{u_n(x)}{n} \qquad (\mathcal{R}_n)$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1}$$

et pour $n \geq 2$,

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k(x)}{k(k+1)}$$

Il s'agit d'abord de calcuker une expression de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ (**Question 1**) puis, de démontrer $(\mathcal{R}_n)$ par récurrence. La convergence de $T_n(x)$, est obtenue **(Question 2)** par comparaison avec la série convergente de Riemann $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$; on en déduit la convergence de $S_n(x)$.