Espaces vectoriels

1) Structure vectorielle de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1 $\mathbb{R}^2$ *est l'ensemble des couples de réels. On représentera les couples de réels par des matrices-colonnes:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \textit{avec } x \in \mathbb{R} \textit{ et } y \in \mathbb{R}.$$

On identifiera chaque couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *au vecteur de coordonnées* x *et* y*.*

On définit la somme de deux vecteurs, et le produit d'un réel λ par un vecteur, en posant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Les principales propriétés de ces deux opérations sont les suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$(\lambda+\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par les réels λ, et qui vérifie l'analogue de ces huit propriétés. On définit de même les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Par exemple $\mathbb{R}^3$, ensemble des triplets de réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^3$, ensemble des triplets de nombres complexes , est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2) Sous-espaces vectoriels.

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$; on cherche à savoir si F est aussi un espace vectoriel. Pour cela il faut d'abord que, chaque fois qu'on additionne deux éléments de F, on obtienne un élément de F; il faut aussi que, si on multiplie un élément de F par un réel λ, on obtienne un élément de F. Les huit propriétés du paragraphe précédent seront alors automatiquement vérifiées (par les éléments de F) puisqu'elles sont vérifiées par les éléments de $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement on pose la définition suivante:

Définition 2 *Soit F un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si la somme de deux éléments quelconques de F appartient à F, et si le produit par un réel λ d'un élément de F appartient à F.*

1^{er} exemple: soit a un réel fixé, et soit F l'ensemble de tous les couples $\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$ (autrement dit c'est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $y = ax$, qu'on peut représenter par la droite d'équation $y = ax$).

La somme de deux éléments de F appartient à F:

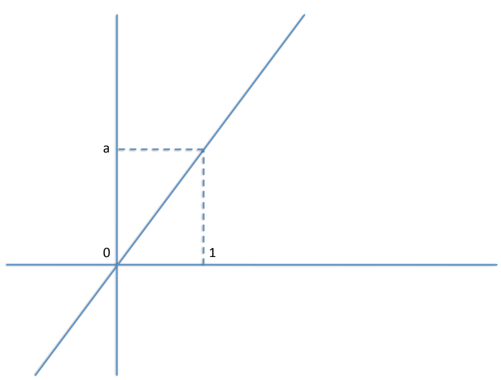
$$\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ ax' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ ax + ax' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ a(x + x') \end{pmatrix} \in F,$$

et le produit par un réel λ d'un élément de F appartient à F:

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ a(\lambda x) \end{pmatrix} \in F,$$

par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

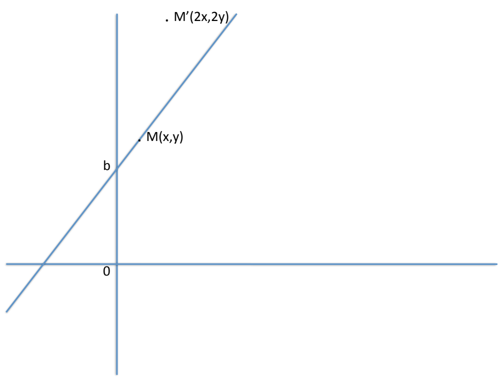
Ensemble F:



On démontre que tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont de cette forme, sauf un: l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ n'est pas de cette forme mais c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$2^{\text{ème}}$ exemple: l'ensemble G des couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $y = ax + b$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (si $b \neq 0$). Si on multiplie, par exemple par 2, un couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $y = ax+b$, on obtient le couple $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à G parce que l'égalité $(2x) = a(2y) + b$ est fausse: $(2x) = a(2y) + 2b$.

Ensemble G:



3) Familles libres, familles génératrices et bases.

Étant donnés deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, il y a deux possibilités:

Soit ils sont colinéaires; par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires parce que $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qu'on peut écrire:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit ils ne sont pas colinéaires; par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on n'a pas $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que si on avait $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors λ et μ seraient nuls.

La définition générale est la suivante:

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel, et $V_1, \ldots, V_n \in E$. On dit que $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement dépendants, ou liés, s'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que*

$$\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n = 0_E \quad (\textit{élément zéro de l'espace vectoriel } E).$$

Dans le cas contraire on dit que $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendants, ou que la famille $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est libre; autrement dit

$$\textit{si } \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n = 0_E \ , \ \textit{alors } \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Autre définition:

Définition 4 *Soit E un espace vectoriel, et $V_1, \ldots, V_n \in E$. On dit que $V_1, \ldots, V_n$ engendrent E, ou que $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est une famille génératrice de E, si tout élément de E s'exprime en fonction de $V_1, \ldots, V_n$ c'est à dire*

$$\forall V \in E, \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \ V = \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n.$$

Vérifions le dans le cas des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$:

on considère un élément $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$; on veut démontrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

ce qui équivaut au système d'équations

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = \alpha \\ 2\lambda + 5\mu = \beta \end{cases}$$

En retranchant deux fois la première équation de la deuxième on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = \alpha \\ \mu = \beta - 2\alpha \end{cases}$$

qui permet de calculer $\mu = \beta - 2\alpha$ et $\lambda = \alpha - 2(\beta - 2\alpha) = 5\alpha - 2\beta$. Donc λ et μ existent (pour tous les éléments V de $\mathbb{R}^2$) et par conséquent les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

Définition et théorème 5 *Soit E un espace vectoriel, et $V_1, \ldots, V_n \in E$. On dit que $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice. Pour tout $V \in E$, les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $V = \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n$ sont alors uniques et s'appellent "coordonnées de V dans la base $\{V_1, \ldots, V_n\}$".*

On a remarqué que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ est à la fois libre et génératrice. Le théorème suivant dit à quelles conditions les familles libres sont génératrices, ou les familles génératrices sont libres.

Théorème 6 *Soit E un espace vectoriel, et $\{V_1, \ldots, V_n\}$ une base de E. Alors*

- toutes les autres bases de E ont même nombre éléments; ce nombre s'appelle "dimension de E";

- si une famille libre a n éléments, alors c'est une base de E;

- si une famille génératrice a n éléments, alors c'est une base de E.

1er exemple: On a vu que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Plus simplement $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est aussi une base, qu'on appelle base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2ème exemple: Vérifions que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base (appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$). On remarque d'abord que tous les triplets $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Pour démontrer que c'est une famille libre on remarque que, si $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc $\lambda=\mu=\nu=0$.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ étant libre et génératrice, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3$^{\text{ème}}$ exemple: Pour vérifier que la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\10\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on remarque d'abord que cette famille a trois éléments (c'est à dire trois vecteurs) et, d'après le théorème, il suffit de vérifier que c'est une famille libre. On résoud le système d'équations

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+5\beta+6\gamma=0\\3\alpha+6\beta+10\gamma=0\end{array}\right.$$

qui équivaut à (en retranchant deux fois la première équation de la deuxième, et trois fois la première de la troisième)

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{array}\right.$$

et par conséquent n'a pas d'autre solution que $\alpha=\beta=\gamma=0$, ce qui prouve que la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\10\end{pmatrix}\right\}$ est libre et, par le théorème, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4$^{\text{ème}}$ exemple: Trois vecteurs liés de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas nécessairement colinéaires mais sont coplanaires. Par exemple $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\7\\9\end{pmatrix}$ sont coplanaires, le troisième étant la somme des deux premiers. Ils ne forment ni une famille libre, ni une famille génératrice, ni une base de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, c'est à dire possédant une base $\{V_1,\dots,V_n\}$. Alors*

- *toute famille libre d'éléments de E a au plus n éléments; si elle a moins de n éléments, on peut la compléter avec des éléments de la base $\{V_1,\dots,V_n\}$ de manière à former une autre base de E;*

_ *toute famille génératrice de E a au moins n éléments; si elle en a plus de n, on peut choisir n d'entre eux de façon à former une base de E;*

_ *tout sous-espace vectoriel de E est de dimension au plus n; s'il est de dimension n il est égal à E.*

4) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Définition et théorème 8 *Soit E un espace vectoriel, et $V_1, \ldots, V_n \in E$. On dit qu'un élément V de E est combinaison linéaire de $V_1, \ldots, V_n$ lorsque*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ ,\ V = \lambda_1 V_1 + \ldots \lambda_n V_n.$$

L'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires de $V_1, \ldots, V_n$ est un sous-espace vectoriel qu'on appelle "sous-espace vectoriel engendré par $V_1, \ldots, V_n$ ", et qu'on note $\mathcal{V}ect(V_1, \ldots, V_n)$. On appelle "rang de $\{V_1, \ldots, V_n\}$" la dimension de ce sous-espace vectoriel. Le rang de $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est aussi égal au nombre maximal d'éléments qu'on peut choisir parmi $V_1, \ldots, V_n$, de façon à former une famille libre.

Exemple 1: On a vu que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ ne forment pas une famille libre. Par contre $\{V_1, V_2\}$ est une famille libre, parce que V_1 et V_2 ne sont pas colinéaires. Ce qui fait que le rang de $\{V_1, V_2, V_3\}$ est 2, et $\{V_1, V_2\}$ est une base de $\mathcal{V}ect(V_1, V_2, V_3)$.

Exemple 2: Soit F l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$. Si on veut démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il suffit de trouver des vecteurs qui engendrent F. L'équation $x + y + z = 0$ équivaut à $z = -x - y$, on peut donc dire que F est l'ensemble des triplets $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on peut dire que F est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5) Applications linéaires.

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes; l'application définie par $V' = AV$ associe à toute matrice-colonne $V \in \mathbb{R}^p$ une autre matrice-colonne $V' \in \mathbb{R}^n$. Par exemple toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ peut être considérée comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui associe à tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Cette application vérifie les relations

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^2,\ A(V+W) = AV + AW \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A(\lambda V) = \lambda AV.$$

On dit alors que c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Donnons la définition et les principales propriétés des applications linéaires dans le cas général:

Définition 9 *Soient E et E' deux espaces vectoriels. Une application f, de E dans E', est dite linéaire si*

$$\forall V, W \in E,\ f(V+W) = f(V) + f(W) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda V) = \lambda f(V).$$

On appelle "noyau de f" et on note $Kerf$ l'ensemble des $V \in E$ tels que $f(V) = 0_E$ (élément neutre de E).

On appelle "image de f" et on note Imf l'ensemble des $V' \in E'$ qui ont un antécédent dans E, c'est à dire pour lesquels il existe $V \in E$ tel que $f(V) = V'$.

On appelle "rang de f" la dimension de son image.

Par exemple l'application f définie par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

a pour noyau

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ou, plus simplement, $\mathrm{Ker} f$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x = -2y$, autrement dit c'est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et c'est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'image de cette application f est l'ensemble des $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\mathrm{Im} f$ est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le rang de f est 1.

D'une façon générale l'image d'une application linéaire définie par une matrice A est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs-colonnes de A, et son rang est égal au rang de la famille des vecteurs-colonnes de A.

THÉORÈME 10 *Soient E et E' deux espaces vectoriels et $f : E \to E'$ une application linéaire. $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E et Imf est un sous-espace vectoriel de E'; leurs dimensions vérifient la relation*

$$\begin{aligned} dim(E) &= dim(Kerf) + dim(Imf) \\ &= dim(Kerf) + rang(f). \end{aligned}$$

f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$, et elle est surjective si et seulement si $Imf = E'$.

6) Déterminants.

On définit le déterminant d'abord pour les matrices d'ordre 2: pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on pose $\det(A) = ad - bc$.

Puis pour les matrices d'ordre 3: si $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ on pose

$\det(A) = a \det \begin{pmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix} - a' \det \begin{pmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{pmatrix} + a'' \det \begin{pmatrix} b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$.

Puis pour les matrices d'ordre 4: si $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix}$ on pose

$\det(A) = a \det \begin{pmatrix} b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \\ d' & d'' & d''' \end{pmatrix} - a' \det \begin{pmatrix} b & b'' & b''' \\ c & c'' & c''' \\ d & d'' & d''' \end{pmatrix} + a'' \det \begin{pmatrix} b & b' & b''' \\ c & c' & c''' \\ d & d' & d''' \end{pmatrix} - a''' \det \begin{pmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ d & d' & d'' \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite.

Le théorème suivant donne quelques unes des utilisations du déterminant:

THÉORÈME 11 *Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes, et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même qui associe à tout vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $V' = AV$.*

- *On a les équivalences*

$$f \textit{ injective} \Leftrightarrow f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

- *Les n vecteurs-colonnes de la matrice A forment une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.
- *Soit I la matrice carrée à n lignes et n colonnes dont les termes diagonaux valent* 1 *et les autres termes* 0 *(appelée matrice unité). Pour tout nombre (réel ou complexe) λ tel que* $\det(A - \lambda I) = 0$, *il existe un vecteur non nul V (dans $\mathbb{R}^n$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}^n$ si $\lambda \in \mathbb{C}$) tel que $AV = \lambda V$.*

Exemples: Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ le polynôme $\det(A - \lambda I)$ (qu'on appelle polynôme caractéristique de A) vaut $\lambda^2 - 5\lambda$; ses racines sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 5$; il leur correspond deux vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ tel que } AV_1 = 0 \cdot V_1$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ tel que } AV_2 = 5 \cdot V_2.$$

Pour $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ le polynôme $\det(B - \lambda I)$ vaut $\lambda^2 + 1$; ses racines sont $\lambda_1 = -i$ et $\lambda_2 = i$; il leur correspond deux vecteurs

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ tel que } BW_1 = -i \cdot W_1$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ tel que } BW_2 = i \cdot W_2.$$