2 exercices espaces vectoriels, bases...

Exercice 2.1 *Vérifier que le système (u,v,w) est une base de* $\mathbb{R}^3$: $u = (0, 1, 1), v = (1, 0, 1), w = (0, 0, 1)$
de deux méthodes différentes (famille libre, famille génératrice...) on verra encore d'autres méthodes plus tard...

Décomposer le vecteur $U = (2, 3, -1)$ *dans la base canomique de* $\mathbb{R}^3$*et dans cette base.*

Exercice 2.2 *Les sous ensembles suivants de* $\mathbb{R}^3$ *(ou* $\mathbb{R}^4$*) sont-ils des sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*? si oui, en donner une base :(ne pas utiliser la définition générale d'un espace vectoriel...)*

On utilisera pour cela le cours : l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs d'une famille constitue un sous espace vectoriel; comment nomme t-on ce sous espace ?

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, tel que* $x + y = 0$ *et* $2x - y + z = 0\}$ *; interprétation géométrique.*

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, tel que* $x - y + z = 0$ *et* $x - y - z = 1\}$*(réponse rapide...)*

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, tel que* $2x + y + 3z = 0\}$*interprétation géométrique;*

$I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$*, tel que* $x + y = 0$*, et* $2x - y + t = 0\}$

Exercice 2.3 *Montrer que le sytème* $U = (1, 1 + X, 1 + X^2)$ *est une base de l'espace* $\mathbb{R}_2[X]$*. Quelles sont, dans la base canonique et dans cette base, les coordonnées de* $P(X) = X^2 + X$*? de* $Q(X) = X$ *? de* $R(X) = 2X^2 - X - 1$*?*

Exercice 2.4 *Que signifie la phrase : "F est le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs U" ? Donner plusieurs réponses. Pourquoi toute famille V contenant les éléments de U est-elle aussi génératrice ?*

Exercice 2.5 *Montrer que la famille* $V = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^4$*; est -elle génératrice ?*

Exercice 2.6 *1) A l'aide des déterminants, dire si les systèmes suivants de vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$:

a) $u = (1, 0, 2); v = (-1, 3, 1)$ *;* $w = (2, 1, 5)$

b) $u\prime = (1, 1, 3); v\prime = (-1, 3, 0); w\prime = (2, 0, 0)$

c) $u = (1, 3, 0); v = (-2, 1, 1); w = (-4, 9, 3)$

Solutions TD espaces vectoriels, bases... ***Pour bien comprendre...***

Il y a une difficulté en algèbre linéaire : les ensembles dans lesquels on travaille sont divers et variés ; il importe avant toute chose de bien se repérer : quel est l'espace vectoriel, quels sont ses éléments, quel est l'élément neutre , savoir faire la distinction entre vecteurs et coordonnées etc ; un tableau simple pour faire le point :

Espace E :	$\mathbb{R}^3$; élément neutre : (0,0,0)	$\mathbb{R}_2[X]$ neutre : polynôme nul
Vecteur u de E :	$u = (x, y, z)$	$u = aX^2 + bX + c$
Base canonique B :	$B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$	$B = (1, X, X^2)$
Coordonnées de u dans B :	(x, y, z)	(c, b, a)

Ainsi dans $\mathbb{R}^3$, *(ou* $\mathbb{R}^n$*) un vecteur* $u = (x, y, z)$ *est confondu avec ses composantes dans la base canonique ; mais dans les autres espaces vectoriels, ce n'est pas la même chose :* $aX^2 + bX + c \neq (c, b, a)$

Une base de E,espace vectoriel de dimension n : c'est une famille libre de n vecteurs ; c'est une famille génératrice de n vecteurs ; c'est une famille libre et génératrice ; c'est une famille U telle que tout vecteur de E se décompose de manière unique sur les vecteurs de U.

Solution 2.1 *On peut montrer que la famille est libre :*

Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$ *alors on a en identifiant après développement :* $\beta = 0; \alpha = 0; \alpha + \beta + \gamma = 0$:

Donc c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *: c'est une base.*

Pour avoir les coordonnées de $U = (2, 3, -1)$ *la base canonique : ce sont : 2,3,-1 ;*

Dans la base (u,v,w), on écrit : $U = \alpha u + \beta v + \gamma w = (\beta; \alpha; \alpha + \beta + \gamma) = (2, 3, -1)$ *et on trouve facilement* α, β, γ.

Solution 2.2 *On écrit autrement F : le système* $x + y = 0$ *et* $2x - y + z = 0$ *équivaut à :*

$\begin{cases} y = -x \\ z = -3x \end{cases}$ *, x est indéterminé, il est quelconque.*

Donc : (x, y, z) appartient à F si et seulement si : $(x, y, z) = (x, -x, -3x) = x(1, -1, -3)$

Donc F est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $u = (1, -1, -3)$

Un vecteur non nul est toujours libre :

F est une droite vectorielle, la droite de base (u), $u = (1, -1, -3)$

F est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u.

G n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas l'élément neutre (0,0,0).

H : On écrit autrement H : $2x + y + 3z = 0$ *équivaut à*

$\begin{cases} x = x \\ y = -2x - 3z \\ z = z \end{cases}$ *cela veut dire que x et z sont indéterminés, il n'y a pas de condition sur eux ; alors, y vaut* $y = -2x - 3z$

On a facilement (x, y, z) appartient à F si et seulement si : $(x, y, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$:

Donc H est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, -2, 0)$ *et* $v = (0, -3, 1)$

H est de dimension 2 parce que la famille (u,v), génératrice de H, est aussi libre :

2 vecteurs non colinéaires sont toujours libres.

Remarque : on a choisi d'écrire y en fonction de x et z ; deux autres choix étaient possibles, et auraient donné deux autres bases de H.

On procède de même pour I.

Solution 2.3 *On montre :*

soit que c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ *: c'est une base.*

soit que c'est une famille génératrice de 3 vecteurs, c'est mieux ici car cela donne la réponse à la question suivante :

Soit $A(X) = aX^2 + cX + c$ *: ses coordonnées dans la base canonique sont c,b,a ;*

Cherchons, pour prouver que U *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$*, s'il existe* α, β, γ *tels que* $aX^2 + bX + c = \alpha 1 + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X^2)$ *:*

On obtient : $\alpha + \beta + \gamma = c, \beta = b, \gamma = a$ *:*

D'où : $\alpha = c - a - b, \beta = b, \gamma = a$

Donc U *est une famille génératrice de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}_2[X]$ *: c'est une base.*

On a aussi les coordonnées de $P(X) = X^2 + X$ *dans cette base :*

Ce sont $\alpha = c - a - b = -2, \beta = b = 1, \gamma = a = 1$ *:*

Donc $P(X) = -2(1) + 1(1 + X) + 1(1 + X^2) = X^2 + X$

Les coordonnées de $P(X)$ *sont dans la base canonique : (0,1,1), dans la base U : (-2,1,1)*

De même pour Q et R.

Solution 2.4 *Voir cours ; toute famille V contenant les éléments de U est aussi génératrice : puisque tout vecteur u de F est combinaison linéaire des vecteurs de U, u est aussi combinaison linéaire des vecteurs de V : il suffit de mettre des coefficients nuls devant les autres vecteurs*

Solution 2.5 *La famille* $V = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^4$ *: vérification facile avec la définition ; ce n'est pas une famille génératrice sinon ce serait une base de* $\mathbb{R}^4$ *(famille libre et génératrice), de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}^4$*,ce qui est impossible puisque* $dim\mathbb{R}^4 = 4$

Solution 2.6 *Les systèmes suivants de vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$ *si leur déterminant est non nul*

a) $u = (1, 0, 2); v = (-1, 3, 1); w = (2, 1, 5) : Det(u, v, w) = 0$

b) $u\prime = (1, 1, 3); v\prime = (-1, 3, 0); w\prime = (2, 0, 0) : Det(u, v, w) = -18$

c) $u = (1, 3, 0); v = (-2, 1, 1); w = (-4, 9, 3) : Det(u, v, w) = 0$

Seule la famille $(u\prime, v\prime, w\prime)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

3 Calculs matriciels

Exercice 3.1 *On donne les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *: calculer* $A + B; AB; BA$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, *calculer* CB

Exercice 3.2 *Multiplier entre elles les matrices suivantes :* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.3 *Soit les matrices A, B, C dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *Quelles sont les matrices inversibles ?*

Quels sont les rangs des matrices A, B,C ?

Quelle est la matrice inverse de B ?

Exercice 3.4 *Soit J la matrice n lignes , n colonnes définie par* $a_{ij} = 0$ *sauf* $a_{n-k;k+1} = 1$, *pour tout k compris entre 0 et n-1*

Calculer les puissances de J : J^p *pour tout entier non nul p.*

Exercice 3.5 *1) Soit la matrice* $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *: calculer* K^2;

2) Montrer que, M et N étant 2 matrices carrées :

La formule de Newton : $(M+N)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} M^{n-p} N^p$ *s'applique si les matrices M et N commutent, c'est à dire si* $MN = NM$

3) On pose pour a et b réels donnés : $A = aI + bK$ *: montrer que pour tout entier n, il existe des réels* a_n *et* b_n *tels que* $A^n = a_n I + b_n K$; *donner les expressions de* a_n *et* b_n.

Exercice 3.6 *On considère l'ensemble des matrices du type :*

$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *a étant un réel :*

1) Montrer que pour tous réels a et b, $M_a M_b = M_b M_a$

2) En remarquant que $M_0 = I_3$, *montrer que* M_a *est inversible et chercher l'inverse.*

Exercice 3.7 *Montrer que toute matrice carrée triangulaire ne comportant aucun zéro sur la diagonale principale est inversible. Montrer que le déterminant d'une telle matrice est le produit des éléments de la diagonale principale.*

Indiquer une méthode simple pour trouver son inverse.

Solutions des exercices du TD calculs matriciels

Solution 3.1 *On donne les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *: on obtient*

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution 3.2 *Multiplier entre elles les matrices suivantes :*$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est une matrice (4 lignes, 5 colonnes), B est une matrice (3 lignes, 4 colonnes),

On ne peut qu'effectuer le produit BA et il vaut : $BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution 3.3 *a) A n'est pas une matrice inversible car* $DetA = 0$

B est une matrice inversible car $DetB = -18$

C n'est pas une matrice inversible car $DetC = 0$

b) B est de rang 3 puisque $DetB \neq 0$;*A et C sont de rang 2 puisque on peut extraire dans A et dans C des déterminants d'ordre 2 non nuls ; ou bien parce que dans A et dans C, il y a 2 colonnes non proportionnelles.*

c) La matrice inverse de B par résolution de système du type MX = X' donne :

$$\begin{cases} x' = x - y + 2z \\ y' = x + 3y \\ z' = 3x \end{cases} \quad d'où : \begin{cases} x = \frac{1}{3}z' \\ y = \frac{1}{3}(y' - \frac{1}{3}z') \\ z = x' + \frac{1}{3}y' - \frac{4}{9}z' \end{cases}$$

D'où la matrice inverse : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$

On peut vérifier le calcul en effectuant le produit BB^{-1}

Solution 3.4 *Soit J la matrice n lignes , n colonnes définie par* $a_{ij} = 0$ *sauf* $a_{n-k;k+1} = 1$, *pour tout k compris entre 0 et n-1*

Les puissances de J : J^p *pour tout entier non nul p, s'obtiennent en calculant d'abord* $J^2 = I_n$, *donc si n est pair,*

$J^{2k} = (J^2)^k = I_n$;*et si n est impair* $J^{2k+1} = (J^2)^k J = J$.

Solution 3.5 *Soit la matrice* $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $K^2 = I_4$

On pose pour a et b réels donnés : $A = aI + bK$ *: pour montrer que pour tout entier n, il existe des réels* a_n *et* b_n *tels que* $A^n = a_n I + b_n K$, *on peut procéder par récurrence ; il est plus rapide, afin d'avoir les valeurs de* a_n *et* b_n *de faire directement le calcul :*

La formule de Newton : $(A+B) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^{n-p} B^p$ *s'applique si les matrices* A *et* B *commutent :* $AB = BA$, *ce qui est toujours le cas quand l'une des deux est l'identité :*

Donc $A^n = (aI + bK)^n = \sum_{p=0}^{n} ()npa^{n-p} b^p K^p =$

$A^n = (\sum_{p\ pair\ p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p) I + (\sum_{p\ impair\ p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p) K$

Donc on a mis en évidence des coefficients tels que $A^n = a_n I + b_n K$.

On peut alors expliciter si nécessaire A^n.

Solution 3.6 *1) La vérification est facile en effectuant* $M_a M_b$ *et* $M_b M_a$

2) Il est facile également de vérifier que $M_0 = I_3$: *donc* $M_a M_{-a} = I_3$ *donc* M_a *est inversible et* $M_a^{-1} = M_{-a}$

Solution 3.7 *Toute matrice carrée triangulaire ne comportant aucun zéro sur la diagonale principale est inversible. En effet, le déterminant d'une telle matrice est le produit des éléments de la diagonale principale, propriété que l'on démontre par récurrence, puisque le mineur associé à l'élément* a_{11} *est un déterminant d'ordre* $n-1$.

Une méthode simple pour trouver son inverse est d'écrire et d'inverser le système $MX = X'$ *et de commencer par le haut si la matrice est triangulaire inférieure, par le bas si elle est triangulaire supérieure...*

4 TD : Changements de bases

Exercice 4.1 *Dans un espace vectoriel E, on donne une base* (e_1, e_2) *et un endomorphisme u de matrice dans cette base :* $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *$\theta$ étant un réel donné.*

1) Exprimer $u(e_1)$ *et* $u(e_2)$ *dans la base* (e_1, e_2).
2) Soient f_1, f_2 *les vecteurs donnés par :* $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$:
Montrer que (f_1, f_2) *forme une base de E*
3) Exprimer $u(f_1)$ *et* $u(f_2)$ *dans la base* (e_1, e_2)
4) Exprimer $u(f_1)$ *et* $u(f_2)$ *dans la base* (f_1, f_2)
5) Ecrire alors la matrice de u dans la base (f_1, f_2).

6) Traiter la question 5 par la méthode de matrice de passage

Exercice 4.2 *Soit f l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par sa matrice A dans des bases* (e_1, e_2, e_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *et* (f_1, f_2) *de* $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Soit $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_2 + e_1$: *montrer que* (e'_1, e'_2, e'_3) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.
Trouver la matrice de f dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) *et* (f_1, f_2).
b) Soit $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ *et* $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$: *montrer que* (f'_1, f'_2) *forme une base de* $\mathbb{R}^2$
Trouver la matrice de f dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) *et* (f'_1, f'_2).

Exercice 4.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *et F un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B\prime = (f_1, f_2, f_3)$

Soit g l'application linéaire de E dans F ayant dans les bases B de E , B′ de F, la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que g est un isomorphisme et définir g^{-1} *par sa matrice dans ces bases.*
2) On pose $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = -\dfrac{e_2}{3} + e_3$:
a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) *est une base B" de E*
b) On suppose dans cette question que $E = F$:
Quelle est la matrice N de g dans la base B" ?
c) Pour $k > 0$, *k entier, exprimer* M^k *en fonction de N et de la matrice de passage P de la base B à la base B"*
d) En déduire M^k.

Exercice 4.4 *A l'aide de l'exercice précédent et de la matrice de passage, répondre aux questions :*
a) $E = F = \mathbb{R}^3$, *B est la base canonique: quelles sont les coordonnées de* $v = (1, 3, -2)$ *dans la base* (e'_1, e'_2, e'_3)?
b) $E = F = \mathbb{R}_2[X]$: *expliciter* (e'_1, e'_2, e'_3);
Quelles sont les coordonnées de $P(X)) = 2X^2 - 4X + 1$ *dans la base* (e'_1, e'_2, e'_3)?
c) Vérifier les calculs par une méthode directe sans recours à la matrice de passage P.
d) Expliquer alors le rôle de la matrice de passage P dans ces deux exercices, comparer les méthodes...

Faisons le point sur ce chapitre :

- Indiquer plusieurs méthodes pour trouver la matrice d'une application linéaire dans une autre base
- Ecrire au moins cinq énoncés équivalents à :"M est une matrice carrée inversible"
- Indiquer plusieurs méthodes pour trouver le rang d'une matrice.