1 Exercices équations différentielles

Les équations du type :

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

se résolvent sur tout intervalle I de x où les fonctions a,b,c sont définies et où a ne s'annule pas.

Les solutions de l'équation homogène associée : $a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = 0$ sont :

$$y_1(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)})dx$$

Une solution particulière y_0 pourra être obtenue, si nécessaire, par méthode de Lagrange :

Les solutions sur un tel intervalle I sont alors :

$$y(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx) + y_0(x)$$

1.1 Equations linéaires d'ordre 1

Exercice 1 *Résoudre les équations differentielles en précisant les intervalles de résolution*

1. $y' = 2y + x^2$
2. $3y\prime - y = x$
3. $u\prime + u = 2e^x$
4. $tx\prime + 2x = sint$
5. $y\prime + ytanx = sin2x$
6. $x\prime + \sqrt{2}x = \theta^2 e^\theta$
7. $y' - 2xy = (1-2x)e^x$

En situation concrète avec des notations proches de celles utilisées en physique, chimie, biologie... :

Exercice 2 *Considérons une cuve qui contient 50 litres d'un liquide composé de 90% d'eau et de 10% d'alcool. Un second liquide contenant 50% d'eau et 50% d'alcool est ajouté dans la cuve avec un débit de 4 litres par minute. En même que l'on ajoute le second liquide, un orifice permet l'évacuation de la cuve avec un débit de 5 litres par minute.*
1) Montrer que la fonction y qui donne le nombre de litres d'alcool qui est dans la cuve à l'instant t vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{5}{50-t}y(t) = 2$$

2) Résoudre l'équation différentielle précédente.

Exercice 3 *Chute d'un corps avec résistance de l'air : Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale ; il est soumis à son poids de module mg et à une force due à la résistance de l'air qui vaut en module Cv^2, où C est une constante (appelée coefficient de pénétration dans l'air), v étant la vitesse de l'objet à l'instant t :*

Le principe fondamental de la dynamique donne :
m$\gamma = m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$:

1) Montrer que cette équation se ramène à une équation du type : $\frac{du}{1-u^2} = \frac{g}{a}dt; a$ constante.

2) Résoudre cette équation après avoir vérifié que $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u});$

Exercice 4 *Dans une réaction chimique, une quantité de produit notée [R] évolue en fonction du temps : on note v(t) la vitesse qui vaut* $v(t) = -\dfrac{d[R]}{dt}$; *par ailleurs, on sait que vitesse et quantité [R] sont liées par une équation du type :* $v(t) = k[R]^\alpha$, *où k est une constante et* α *un entier : écrire l'équation différentielle vérifiée par [R] et en déduire l'évolution de [R] en fonction de t.*

1.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Pour les équations du second ordre, (linéaires à coefficients constants et à second membre standard) on utilisera la résolution de l'équation homogène associée et la méthode de recherche de solution particulière adaptée au second membre : un polynôme, une fonction du type $A\cos\varpi x + B\sin\varpi x$, *ou le produit par une exponentielle d'une fonction de l'un des deux types précédents.*

Dans le cas où le second membre est du type $A\cos\varpi x + B\sin\varpi x$, *on cherchera les solutions particulières sous les formes équivalentes :* $y_0(x) = a\cos\varpi x + b\sin\varpi x$ *ou* $y_0(x) = K\cos(\varpi x + \varphi)$, *sauf dans le cas où* $i\varpi$ *est solution de l'équation caractéristique : alors* $y_0(x) = x(a\cos\varpi x + b\sin\varpi x)$ *ou* $y_0(x) = Kx\cos(\varpi x + \varphi)$;

Exercice 5
1. $y" + y\prime + y = 2x + 1$
2. $x" + 4x = \cos 2t$
3. $x" + \varpi^2 x = \sin 4t$; ϖ *est un paramètre.*
4. $y" + 2y\prime + y = 2e^{-x}$
5. $y" + 2y\prime + 5y = cos2x + 2sin2x$
6. $y" + y\prime + 3y = 3x^2 + 1.$

1.3 Autres exercices...

Exercice 6 *Résoudre les équations différentielles :*

$\mathrm{E}_1 : xy\prime + 3y = 0, avec\ y(2) = 1$

Exercice 7 *) Résoudre les équations différentielles :*
a) $y\prime = -3y + e^{5x}$
b) $y" + y\prime + y = x^2$
c) $y" + 2y\prime - y = \sin x + \cos x$

Exercice 8 *La quantité u d'un élément radioactif est solution d'une équation differentielle de la forme :*

$$\frac{du}{dt} = -au.$$

La demi-vie d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demi-vie de l'uranium 238 est de 4.5 10^4*ans*;

Calculer la constante a en fonction de la demi-vie.

Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent ?