

# UE21 Exercices calcul vectoriel

Martine Quinio

31 janvier 2014

**Exercice 1** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , écrire une équation cartésienne du plan passant par  $A(1; -2, 1)$ , dirigé par les vecteurs  $\vec{u}(1, 4, -2)$  et  $\vec{v}(-1, 1, 3)$ ; calculer l'aire du parallélogramme  $ABDC$ , où  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{v} = \vec{AC}$ ; calculer le volume du parallélépipède défini par  $(O, A, B, D, C)$ .

**Exercice 2** Dans l'espace euclidien muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les vecteurs :  $\vec{u}(1, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(-2, 2, k)$   $k$  étant un réel et  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  : à quelle condition a-t-on  $\vec{w} \neq \vec{0}$ ? à quelles conditions sur  $\lambda, \mu, \nu$  le système  $(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}, \nu \vec{w})$  est-elle une base orthonormée ?

**Exercice 3** L'espace étant muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , dire parmi ces bases celles qui sont directes :  $b_1 = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ ,  $b_2 = (\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ ,  $b_3 = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ ,  $b_4 = (-\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ ,  $b_5 = (\vec{i}, -\vec{k}, \vec{j})$

**Exercice 4** Soient  $\vec{u}(1, 2, -3)$  et  $\vec{v}(2, 1, 5)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils orthogonaux ?
3. Calculer  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ .
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle non orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Exercice 5** On considère un triangle  $ABC$  avec  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(1, -3, -5)$  et  $C(3, -4, -4)$ .

1. Déterminer les longueurs des côtés du triangle  $ABC$ .
2. Déterminer le cosinus des angles du triangle  $ABC$ .
3. Déterminer une mesure en radians des angles du triangle  $ABC$ .

**Exercice 6** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Calculer  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  pour les vecteurs suivants.

1.  $\vec{u}(1, -1, 1)$  et  $\vec{v}(-2, 3, 1)$ .
2.  $\vec{u}(-1, 1, 2)$  et  $\vec{v}(1, 0, -1)$ .
3.  $\vec{u}(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 1)$  et  $\vec{v}(\cos(\beta), \sin(\beta), 1)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent deux réels.

**Exercice 7** Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres réels. On considère les vecteurs  $\vec{u}(a, b)$  et  $\vec{v}(c, d)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

**Exercice 8** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Démontrer par deux méthodes différentes que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

## 0.1 Plans et droites

**Exercice 9** On considère le point  $A(1, -2, 4)$  et les vecteurs  $\vec{u}(0, 2, -1)$  et  $\vec{v}(1, 3, 1)$ .

1. Un plan dans l'espace possède-t-il plusieurs types d'équations ?
2. Le plan passant par  $A$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est-il bien défini ?
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par  $A$  et qui est dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
4. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par  $A$  et qui est dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  par deux méthodes différentes.

**Exercice 10** On considère les points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

1. Le plan passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$  est-il bien défini ?
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par  $A$ ,  $B$  et  $C$  par deux méthodes différentes.

**Exercice 11** Déterminer une représentation paramétrique du plan vectoriel qui a pour équation cartésienne  $2x + y + z = 0$ .

**Exercice 12** On considère les points  $A(-1, 2, 3)$  et  $B(0, 1, -2)$  et le vecteur  $\vec{u}(1, 2, 1)$ .

1. Une droite dans l'espace possède-t-elle plusieurs types d'équations ?
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par  $A$  et qui est dirigée par le vecteur  $\vec{u}$ .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points  $A$  et  $B$ .

**Exercice 13** Déterminer une représentation paramétrique de la droite vectorielle définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y - 7z = 0. \end{cases}$$

**Exercice 14** Soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont parallèles et non confondues.
2. Démontrer que  $(D_2)$  et  $(D_3)$  ne se coupent pas.
3. Démontrer que  $(D_1)$  et  $(D_3)$  sont sécantes en un point et calculer les coordonnées de ce point.

**Exercice 15** Soit  $(P)$  le plan vectoriel d'équation  $2x - y + z = 0$  et soit  $(D)$  la droite dirigée par  $\vec{u}(1, 3, 1)$ .

1. La droite  $(D)$  est-elle parallèle à  $(P)$  ?
2. La droite  $(D)$  est-elle orthogonale à  $(P)$  ?
3. La droite dirigée par le vecteur  $\vec{v}(-2, 1, -1)$  est-elle orthogonale à  $(P)$  ?

**Exercice 16** On considère le plan  $(P)$  défini par le point  $A(1, 1, 0)$  et les vecteurs  $\vec{u}(1, 0, 1)$  et  $\vec{v}(0, 1, 1)$ .

1. Le plan  $(P)$  passe-t-il par l'origine ?
2. Soit  $(D)$  la droite passant par l'origine et orthogonale à  $(P)$ . Déterminer un vecteur directeur de  $(D)$ .