

TD1 matrices carrées d'ordre 2

11 février 2014

Exercice 0.1 Soit la suite telle que : $U_0 = U_1 = 1; U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = MV_n$$

Calculer à l'aide de V_0, V_1, V_2, \dots les puissances successives de la matrice M^2, M^3, M^4 sans utiliser la technique de multiplication de matrices, puis, vérifier par cette méthode le calcul; on utilisera $V_2 = M^2V_0, V_3 = M^2V_1$

Exercice 0.2 Soit une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On définit la trace de la matrice le réel : $tr(A) = a + d$ (somme des éléments de la diagonale), et le déterminant de la matrice le réel $det(A) = ad - bc$: montrer que l'on a la relation :

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier cette relation sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, sur la matrice $A' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \dots$

Exercice 0.3 Une méthode efficace de calcul de puissance de matrice...objectif : connaître l'évolution de la fameuse population U_n de lapins...

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont on se propose de calculer les puissances :

1) Ecrire la relation $A^2 - tr(A)A + det(A)I$ pour cette matrice ;

2) On note $P(X)$ le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$: résoudre $P(X) = 0$.

La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$:

Quel est le degré de $R_n(X)$? On note $R_n(X) = a_nX + b_n$: Calculer alors $R_n(X)$ en utilisant les solutions φ et φ' de $P(X) = 0$, sans calculer $Q_n(X)$;

3) Montrer que $A^n = a_nA + b_nI$

4) Expliciter alors A^n : le problème des puissances de A est résolu...du même coup :

5) Montrer que $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$. Quelle est la limite du rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$?

Exercice 0.4 Pour tout réel θ , on pose la matrice $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$:

1) Montrer que $M(\theta + \theta') = M(\theta)M(\theta')$, pour tous réels θ, θ' .

2) Quelle est la matrice $M(0)$?

3) Montrer que $M(\theta)$ est une matrice inversible, quelle est $(M(\theta))^{-1}$?

4) Calculer $(M(\theta))^2$, montrer que $(M(\theta))^2 = M(2\theta)$, puis par récurrence que $(M(\theta))^n = M(n\theta)$

5) On pose $V = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$: calculer le produit $M(\theta)V$; interpréter géométriquement.

6) On pose $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, pour a et b réels quelconques :

Montrer que l'on peut toujours trouver un réel $k > 0$ et θ tels que $A = kM(\theta)$

Application : calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$; vérifier en calculant directement A^2 , A^3 .

1 Solutions exercices matrices ordre 2

Solution 1.1 $V_2 = MV_1 = M^2V_0$; on pose $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on identifie et on trouve facilement avec

$$V_2 = M^2V_0 \text{ et } V_3 = M^2V_1 \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ de même } M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution 1.2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul facile

Solution 1.3 1) On a la relation $A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'$

La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$: le degré de $R_n(X)$ est 0 ou 1 : on peut poser $R_n(X) = a_nX + b_n$

En remplaçant X par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on trouve : $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = a_n\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_n = a_n\varphi + b_n$

et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = a_n\varphi' + b_n$:

$$D'où $a_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$, et $b_n = \frac{\varphi\varphi'^n - \varphi'\varphi^n}{\varphi - \varphi'}$$$

3) On a $A^n = a_nA + b_nI$ car $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) Ainsi, on a $A^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$

5) La population de lapins le mois n est U_n ; elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$ quand n tend vers l'infini, car :

$$V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = A^nV_0 = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $U_n = a_n + b_n$:

Comme $|\varphi'| < 1$, $\lim \varphi'^n = 0$:

On alors $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, et surtout, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

Solution 1.4 1) On utilise les relations d'addition $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ 2) La matrice

$$M(0) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3) $M(\theta)$ est une matrice inversible car son déterminant vaut 1 ; on peut alors calculer l'inverse par application de la formule du cours, ou plus rapidement :

comme $M(\theta) \cdot M(-\theta) = M(0) = I$:

$M(\theta)$ est une matrice inversible et

$$(M(\theta))^{-1} = M(-\theta).$$

4) $(M(\theta))^2 = M(\theta + \theta) = M(2\theta)$; la récurrence est facile en utilisant la question 1).

5) Le produit $M(\theta)V$ est égal à $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$

Ainsi, on comprend pourquoi M est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ .

6) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = kM(\theta)$ si, par identification, $a = k\cos\theta$ et $b = k\sin\theta$: on obtient

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ à l'aide de $\tan\theta = \frac{b}{a}$, si a est non nul; si a est nul, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = 2M(\frac{\pi}{3})$ donc $A^n = 2^n M(n\frac{\pi}{3})\dots$