Mathématiques générales I

Examen - Juin 2010

Calculatrice et documents non autorisés

Durée : 4 heures

EXERCICE 1

1. Représenter un graphe G simple à 5 sommets complet.
2. Quel le plus petit nombre d'arêtes qu'il faut enlever à G pour qu'il ne soit plus connexe ?

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = 1 + t \\ z = z(t) = 1 - t \end{cases}$$

Soit la droite (Δ) , intersection des deux plans d'équation cartésienne :

$$x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 2 = 0.$$

Calculer le sinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

EXERCICE 3

Soit f une application d'un ensemble E (non-vide) dans lui-même.

1. Montrer que si $f \circ f$ est injective alors f l'est aussi.
2. Qu'en est-il de la réciproque ?

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$. Puis, donner le module et l'argument des solutions.

EXERCICE 5

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A$ et $A \subset C$.

EXERCICE 6

Déterminer et donner une équation de la droite qui est l'ensemble des points M d'affixe z du plan, tels que $|z - 2i + 1| = |z + i + 2|$.

EXERCICE 7

Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude f définie par $f(z) = (1 + i)z - 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) + 2y(t) = 5 \cos(t).$$

1. Trouver une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$.
2. Trouver une solution générale y_h de l'équation homogène associée.
3. En déduire une solution générale de (E) .
4. Trouver les solutions qui vérifient $y(0) = -1$.

EXERCICE 9

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.

On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$, où P_n est un polynôme.

3. Trouver P_1 et P_2 .
4. Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1} , P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que f est indéfiniment dérivable.