

Mathématiques Générales I*Durée : deux heures. Calculatrices interdites.**Seul document autorisé : tableau de primitives.*

Examen deuxième session septembre 2009

– I –

1. Dessiner le graphe simple dont les sommets sont les nombres entiers de 1 à 9 où deux sommets sont reliés si et seulement si la somme des deux nombres est divisible par 4.
2. Définir le degré d'un sommet et énoncer le théorème du cours qui précise le nombre de sommets de degré impair. Combien a-t-on de sommets de degré impair ici ?
3. Ce graphe est-il connexe ? Si non déterminer ses composantes connexes.

– II –

Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que l'on a toujours

$$A \cap B \subset A \cup B.$$

2. Que peut-on dire des deux ensembles A et B si on a $A \cap B = A \cup B$? Démontrer le résultat.

– III –

Calculer les racines cubiques de 27. Combien de ces racines ont une partie réelle négative ?

– IV –

Soit g la fonction réelle définie par $g(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

1. Donner le domaine de définition D_g de g .

T.S.V.P.

2. Etudier la fonction g (les limites, le tableau de variation et le graphe).
3. Déterminer l'ensemble image.
4. La fonction g est-elle injective sur D_g ? Est-elle surjective sur R ?
5. Soit la fonction $h :]2, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $h(x) = g(x), \forall x \in]2, +\infty[$. Montrer que h est bijective, puis donner sa réciproque.

– **V** –

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'(t) + ty(t) = te^{-t^2}$$

1. Calculer la solution générale de l'équation homogène associée.
2. Appliquer la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire la solution de l'équation (E) qui vérifie $y(0) = 0$.