Exemples de séries de Fourier

Les séries de Fourier en cosinus et en sinus sont des séries de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

avec a_n et b_n dans $\mathbf{R}$; les séries de Fourier en exponentielles (complexes) sont de la forme

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

avec c_n dans $\mathbf{C}$. Dans cet exercice on s'intéressera à

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(nx)$$

avec $-1 < r < 1$. (On note $\Re(z)$ et $\Im(z)$ la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z .) On se propose d'étudier les séries de fonctions $g(x)$ et $f_r(x)$.