

# Licence SPC, première année, semestre 2

## Aix-Marseille Université

### Equations différentielles, exercices

## 1 Echauffement

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\sin(2x)e^{-3x} ; \quad \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)} ; \quad \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 1} ; \quad \frac{1}{x^2}e^{1/x} .$$

2. Parmi les équations différentielles suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$y' = y ; \quad y' = y + x ; \quad y' = y + \sin(x) ; \quad y' = -xy ; \quad yy' = 1 ; \quad y' = \tan(x) ; \quad y' = \tan(y)$$

## 2 Equations linéaires du premier ordre

Dans tous les cas, on précisera l'intervalle de résolution.

### 2.1 Exercices

1. On souhaite résoudre l'équation

$$y' + 2xy = x ,$$

associée à la condition initiale  $y(0) = 2$ .

- Ecrire l'équation homogène associée, et la résoudre.
- Donner une solution particulière de l'équation inhomogène. En déduire la solution générale de l'équation inhomogène.
- Parmi toutes les solutions de l'équation inhomogène, déterminer laquelle satisfait la condition initiale.

2. Résoudre les équations différentielles suivantes

$$xy' - y = x^2 , \quad xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2} , \quad y' - \frac{y}{\tan(x)} = 0 .$$

en précisant les possibles intervalles de résolution. Existe-t-il une solution sur  $\mathbb{R}$  ?

3. Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$$

sur  $] -\infty, -1]$  et  $[-1, \infty[$ . Existe-t-il une solution sur  $\mathbb{R}$  ?

## 2.2 Un problème en situation : dilution

Considérons une cuve qui contient 50 litres d'un liquide composé de 90% d'eau et de 10% d'alcool. Un second liquide contenant 50% d'eau et 50% d'alcool est ajouté dans la cuve avec un débit de 4 litres par minute. En même temps que l'on ajoute le second liquide, un orifice permet l'évacuation de la cuve avec un débit de 5 litres par minute.

1. Montrer que la fonction  $y$  qui donne le nombre de litres d'alcool dans la cuve à l'instant  $t$  vérifie l'équation différentielle

$$y' + \frac{5}{50-t}y = 2.$$

2. Résoudre cette équation

## 2.3 Un autre problème en situation : cinétique chimique

Dans une réaction chimique, la concentration d'un réactif  $R$ , notée  $[R]$ , évolue en fonction du temps : la vitesse volumique de disparition de  $R$ , notée  $v(t)$ , est définie par

$$v = -\frac{d[R]}{dt}.$$

On dit que la réaction est d'ordre  $\alpha$  (où  $\alpha$  est un entier positif) lorsque vitesse volumique et concentration sont reliées par une relation du type

$$v = K[R]^\alpha,$$

où  $K$  est une constante.

Ecrire l'équation différentielle que satisfait la concentration  $[R]$ , et la résoudre sur  $\mathbb{R}^+$ .

## 2.4 Evolution d'une population

Une étude sur le comportement d'organismes vivants placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelée en permanence, a conduit à modéliser l'évolution de la population par une fonction  $t \rightarrow N(t)$  telle que :

$$N' = 2N - 0,0045N^2, \quad \text{sur } \mathbb{R}^+,$$

où le temps  $t$  est exprimée en heures et  $N(t)$  représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant  $t$ . On suppose que le nombre initial d'individus vaut  $N(0) = 1000$ .

Le but de l'exercice est de déterminer la fonction  $N$ .

1. Cette équation différentielle est-elle linéaire ?
2. On se propose de la remplacer par une équation différentielle plus simple puis la résoudre. On suppose pour cela que la fonction  $N$  ne s'annule pas sur  $[0, \infty[$  et on pose pour tout  $t \geq 0$ ,

$$q(t) = 1/N(t)$$

Calculer la dérivée de la fonction  $q$ .

3. Montrer que  $N$  est solution si et seulement si  $q$  est solution de l'équation différentielle

$$q' = -2q + 0,0045.$$

4. Donner la forme générale des solutions de cette dernière équation, en déduire la forme générale de  $N$ .
5. En déduire la solution  $N$  satisfaisant la condition initiale.

## 3 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

### 3.1 Exercices

1. On cherche à résoudre l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = e^x .$$

- a) Résoudre l'équation homogène associée.
- b) Rechercher une solution particulière de l'équation inhomogène sous la forme

$$y_0(x) = P(x)e^x ,$$

où  $P$  est un polynôme.

- c) En déduire la solution générale de l'équation inhomogène.
2. Pour les équations différentielles suivantes, on cherchera tout d'abord la solution générale de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation inhomogène adaptée au second membre, et on en déduira la solution générale de l'équation inhomogène.
    - a)  $y'' + y' + y = 2x + 1$
    - b)  $y'' + \omega_0^2 y = \sin(x)$
    - c)  $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

### 3.2 Oscillateur harmonique

On désigne par *oscillateur harmonique* un système physique (électrique, mécanique,...) dont le mouvement est décrit par une équation différentielle d'ordre 2 de la forme

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0 ,$$

où  $\omega_0$  et  $\alpha$  sont des constantes réelles positives. Si  $\alpha \neq 0$ , on dit que l'oscillateur est amorti.

1. Résoudre cette équation dans le cas  $\alpha = 0$ , par la méthode classique. Exprimer les solutions en fonction des conditions initiales

$$y(0) = u_0 , \quad y'(0) = v_0$$

où  $u_0, v_0$  sont deux réels fixés.

2. On suppose que  $\alpha$  est suffisamment petit (plus précisément,  $\alpha < \omega_0$ ), et on pose  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Montrer que l'équation différentielle admet des solutions de la forme

$$y(x) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 x + \varphi) ,$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes d'intégration.

3. Calculer  $y'$  sous cette forme. Exprimer les constantes d'intégration en fonction des conditions initiales.
4. Tracer la solution dans le cas particulier  $u_0 = 0, v_0 = 1$ .

## 4 Problème : circuit RLC

On considère un circuit  $RLC$  comme décrit en Fig. 1.

La loi d'Ohm montre que la tension  $t \rightarrow v(t)$  aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle

$$LCv'' + RCv' + v = u ,$$

où  $u$  est la tension imposée par le générateur.

On s'intéresse ici au problème dit de Cauchy, dans lequel l'équation différentielle ci-dessus est complétée par des données initiales

$$v(0) = v_0 , \quad \text{et} \quad v'(0) = v_1 .$$

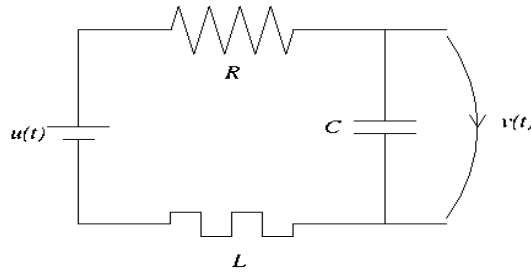


FIG. 1: Le circuit  $RLC$

### 4.1 Le cas amorti

On suppose  $R \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $L \neq 0$ .

1. On considère tout d'abord l'équation homogène. Ecrire l'équation caractéristique, et la résoudre. Il sera nécessaire de distinguer trois cas, suivant les valeurs des paramètres  $R$ ,  $L$  et  $C$ .
2. Résoudre l'équation homogène dans le cas  $R > 2\sqrt{L/C}$ . On pourra poser  $\gamma = -R/2L$ , et  $\mu = \frac{1}{2LC}\sqrt{(RC)^2 - 4LC}$ .
3. Résoudre l'équation homogène dans le cas  $R < 2\sqrt{L/C}$ . On pourra poser  $\gamma = -R/2L$ , et  $\omega_1 = \frac{1}{2LC}\sqrt{4LC - (RC)^2}$ .  
Voyez vous des similarités avec la solution précédente ?  
Interpréter le résultat.
4. Résoudre l'équation homogène dans le cas  $R = 2\sqrt{L/C}$ .
5. On se limite au second cas de figure ( $R < 2\sqrt{L/C}$ ). Résoudre l'équation inhomogène, dans le cas où le second membre est de la forme

$$u(t) = te^{-\alpha t} \cos(\varpi t) ,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\varpi \in \mathbb{R}^+$  sont des constantes, et en supposant des conditions initiales  $u_0 = 1$ , et  $v_0 = 0$ .

6. Tracer quelques exemples de solutions.

### 4.2 Le cas résonant

On considère maintenant le cas  $R = 0$ . En reprenant la solution précédemment obtenue, résoudre l'équation différentielle dans le cas où le second membre est de la forme

$$u(t) = \cos(\varpi t) ,$$

où  $\varpi \in \mathbb{R}^+$ . On distinguera deux cas :  $\varpi \neq \omega_1$  et  $\varpi = \omega_1$ . Qu'observe-t-on dans ce dernier cas ?