UE Mathématiques 2

TD 7

Courbes planes

1 Exercices Courbes planes

1.1 courbes paramétrées

Exercice 1 *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(o, \vec{i}, \vec{j})$*, soit C la courbe définie sur* $[0; 2\pi]$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{array}\right.$$

a) Reconnaître et représenter rapidement C
b) Déterminer une représentation cartésienne de C

Exercice 2 *Etudier la courbe paramétrée :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{array}\right.$$

Plus précisement :
1) Définir un intervalle d'étude en précisant les symétries associées.
2) Donner le tableau de variations
3) Etudier les points particuliers et leur tangente.
4) Tracer la courbe

Exercice 3 *Etudier la courbe paramétrée :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3(t - sint) \\ y(t) = 3(1\text{-} \cos \mathrm{t}) \end{array}\right. \quad \text{(cycloïde)}$$

Interprétation mécanique : roulement sans glissement d'une circonférence sur un axe : une roue C de centre A et de rayon 3 unités roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l'aide d'un repère adapté, montrer que l'équation de la courbe précédente est l'équation de la trajectoire d'un point fixe sur la roue :

Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d'un point M de C, noter I le point de contact et t l'angle $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JI})$, où A(1 ;0) et J le centre du cercle : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM.

Exercice 4 *Etudier et construire la courbe paramétrée :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin \mathrm{t} \text{ - } \sin 2\mathrm{t} \end{array}\right. \quad \text{c'est une épicycloïde : interprétation mécanique :}$$

Soit cercle C_1de centre C, de rayon 1, roulant sans glisser sur un cercle fixe C_2 de centre 0, de rayon 1 : Le repère étant centré en O, écrire les coordonnées d'un point M de C_1, noter I le point de contact des deux cercles : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM, où A(1 ;0).

Exercice 5 *Quelle est la pente de la tangente en A de paramètre* $t = 0$*, à la courbe paramétrée :* $x(t) = \cos 2t$*;* $y(t) = \cos t - \sin t$*. Donner un intervalle d'étude pour cette courbe. Y-a-t'il des points stationnaires ?*

Exercice 6 *Soit la courbe paramétrée :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

Etudier précisément les points particuliers et leur tangente
Etudier les branches infinies

Exercice 7 *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+1)\exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

on mettra en évidence les points remarquables.

Exercice 8 *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante : (strophoïde)*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

1.2 courbes polaires

Exercice 9 *Reconnaître et étudier les courbes polaires : (a et θ_0 sont réels donnés)*

$$r = a; r = \theta_0; r = \frac{5}{\cos\theta}; r = -\frac{1}{\sin(\theta-\theta_0)}; r\cos(\theta-\theta_0) = a; r = a\cos(\theta-\theta_0)$$

Exercice 10 *Etudier et construire la courbe polaire :*
$r = 3\cos 2\theta$,*a étant un réel positif.*

Exercice 11 *Etudier la courbe polaire :* $r = 4\sin\theta$; *tracer la courbe en précisant :*

- Un intervalle d'étude et les symétries associées ;
- Les tangentes aux points remarquables.

Exercice 12 *Etudier et construire la courbe polaire (spirale logarithmique)*

$$r = e^\theta$$

Exercice 13 *Calculer la longueur de la courbe* $y = chx = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, x \in [-a, a]$, *a réel positif donné.*

Exercice 14 *Le sillon d'un disque peut être modélisé par une spirale d'Archimède d'équation polaire :* $r = a\frac{\theta}{2\pi}$

a représente la largeur du sillon ; (en effet, quand θ augmente de 2π, l'épaisseur de la "bobine" augmente de $a\frac{\theta+2\pi}{2\pi} - a\frac{\theta}{2\pi} = a$)
Le disque est gravé entre les distances au centre R et R' : calculer la longueur de sillon gravé.
Application numérique : $R = 2$cm, $R\prime = 5$cm, $a = 0,001$cm

Exercice 15 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par une cardioïde* $r = 1 + cos\theta$, *courbe que l'on étudiera d'abord.*

Exercice 16 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par le trèfle à trois pétales :* $r = 3cos3\theta$,*courbe que l'on étudiera d'abord.*