

1 Exercices Courbes planes

1.1 courbes paramétrées

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit C la courbe définie sur $[0; 2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}$$

- Reconnaître et représenter rapidement C
- Déterminer une représentation cartésienne de C

Exercice 2 Etudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Plus précisément :

- Définir un intervalle d'étude en précisant les symétries associées.
- Donner le tableau de variations
- Etudier les points particuliers et leur tangente.
- Tracer la courbe

Exercice 3 Etudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad (\text{cycloïde})$$

Interprétation mécanique : roulement sans glissement d'une circonférence sur un axe : une roue C de centre A et de rayon 3 unités roule sans glisser sur un axe horizontal ; à l'aide d'un repère adapté, montrer que l'équation de la courbe précédente est l'équation de la trajectoire d'un point fixe sur la roue :

Le repère étant centré en O , écrire les coordonnées d'un point M de C , noter I le point de contact et t l'angle $(\vec{JM}, \vec{JI})$, où $A(1;0)$ et J le centre du cercle : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM .

Exercice 4 Etudier et construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad \text{c'est une épicycloïde : interprétation mécanique :}$$

Soit cercle C_1 de centre C , de rayon 1, roulant sans glisser sur un cercle fixe C_2 de centre O , de rayon 1 : Le repère étant centré en O , écrire les coordonnées d'un point M de C_1 , noter I le point de contact des deux cercles : le roulement sans glissement se traduit par la condition : longueur de l'arc AI = longueur de l'arc IM , où $A(1;0)$.

Exercice 5 Quelle est la pente de la tangente en A de paramètre $t = 0$, à la courbe paramétrée : $x(t) = \cos 2t$; $y(t) = \cos t - \sin t$. Donner un intervalle d'étude pour cette courbe. Y-a-t'il des points stationnaires ?

Exercice 6 Soit la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{2t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Etudier précisément les points particuliers et leur tangente
Etudier les branches infinies

Exercice 7 Etudier et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = (t^2 + 1) \exp(-\frac{t^2}{2}) \\ y(t) = t \exp(-\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

on mettra en évidence les points remarquables.

Exercice 8 *Etudier et construire la courbe paramétrée suivante : (strophoïde)*

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

1.2 courbes polaires

Exercice 9 *Reconnaître et étudier les courbes polaires : (a et θ_0 sont réels donnés)*

$$r = a; r = \theta_0; r = \frac{5}{\cos \theta}; r = -\frac{1}{\sin(\theta - \theta_0)}; r \cos(\theta - \theta_0) = a; r = a \cos(\theta - \theta_0)$$

Exercice 10 *Etudier et construire la courbe polaire :*

$$r = 3 \cos 2\theta, a \text{ étant un réel positif.}$$

Exercice 11 *Etudier la courbe polaire : $r = 4 \sin \theta$; tracer la courbe en précisant :*

- Un intervalle d'étude et les symétries associées;
- Les tangentes aux points remarquables.

Exercice 12 *Etudier et construire la courbe polaire (spirale logarithmique)*

$$r = e^\theta$$

Exercice 13 *Calculer la longueur de la courbe $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-a, a]$, a réel positif donné.*

Exercice 14 *Le sillon d'un disque peut être modélisé par une spirale d'Archimède d'équation polaire : $r = a \frac{\theta}{2\pi}$*

a représente la largeur du sillon ; (en effet, quand θ augmente de 2π , l'épaisseur de la "bobine" augmente de $a \frac{\theta+2\pi}{2\pi} - a \frac{\theta}{2\pi} = a$)

Le disque est gravé entre les distances au centre R et R' : calculer la longueur de sillon gravé.

Application numérique : $R = 2\text{cm}$, $R' = 5\text{cm}$, $a = 0,001\text{cm}$

Exercice 15 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par une cardioïde $r = 1 + \cos \theta$, courbe que l'on étudiera d'abord.*

Exercice 16 *Calculer l'aire du secteur plan déterminé par le trèfle à trois pétales : $r = 3 \cos 3\theta$, courbe que l'on étudiera d'abord.*