BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

$Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card\ (A \cap B)$
$Card(A \times B) = Card\ A\ \ Card\ B$

Soit E un ensemble de n éléments

Nombre de permutations de E :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$; $0! = 1$

Nombre d'arrangements de p éléments de E :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$$

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}\ ; \quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$; $P(A|B)$ se note aussi $P_B(A)$
Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \cdots, B_n$ forment une partition de Ω, alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

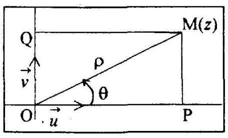
Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

III. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$
Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$
$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho \cos\theta$
$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho \sin\theta$
$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$
$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$
$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$
$|zz'| = |z||z'|$
$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

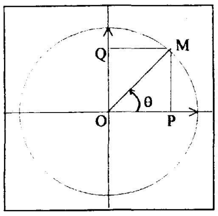
$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}; \ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ; \ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de transformation ***(SPÉCIALITÉ)***

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules de Moivre et applications

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ***(SPÉCIALITÉ)***

$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Les solutions de $z^n = a$, où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont

$z_k = z_0 u_k$, où $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

(formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$log\,x = \frac{ln\,x}{ln\,10}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(cos\,\beta x + i\,sin\,\beta x)$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1+x)$, e^x, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$

$\lim_{h\to0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h\to0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h\to0} \frac{sin\,h}{h} = 1$

$$\begin{cases} (1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h) \\ \lim_{h\to0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq 0)$$

2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

Si $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$; si $0 < a < 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$e^{rx},\ r=\alpha+i\beta$	re^{rx}	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)'=u'+v'$

$(ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$

$(e^u)'=e^u u'$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x)=f(x)$

$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt\leqslant\int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$,

alors $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Intégration par parties

$\int_a^b u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+ay'+by=0$ équation caractéristique : $r^2+ar+b=0$ de discriminant Δ	• Si $\Delta>0$, $f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique • Si $\Delta=0$, $f(x)=(\lambda x+\mu)e^{rx}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique • Si $\Delta<0$, $f(x)=(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x)e^{\alpha x}$ ...... où $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique