Théorème de Fubini

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$; le théorème de Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

dit que la valeur de l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ s'obtient
- en intégrant d'abord $f(x,y)$ par rapport à x, avec y fixé,
- puis en intégrant ce qu'on a obtenu par rapport à y.

On peut échanger les rôles de x et de y d'où une deuxième formule:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Si on veut intégrer f dans un domaine D, sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, on remarque d'abord que

$$\int_D f = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_D$$

où χ_D est la fonction qui vaut

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Pour calculer $\displaystyle\int_D f$, par exemple au moyen de la deuxième formule de Fubini, on écrit

$$\int_D f = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_D = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_D(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

et on calcule d'abord $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_D(x,y)\mathrm{d}y$ (pour x fixé):
c'est l'intégrale de $f(x,y)$ sur l'intervalle $[a,b]$ des y pour lesquels $\chi_D(x,y)$ vaut 1, autrement dit $(x,y) \in D$. Les points (x,a) et (x,b) ont même abscisse x et sont sur le bord du domaine D.
Puis on intègre ce qu'on a obtenu sur l'intervalle $x \in [c,d]$ (où c est la plus petite des abscisses des points de D et d la plus grande).