

L'intégrale de Gauss

Il s'agit de calculer la valeur de "*l'intégrale de Gauss*", soit :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx.$$

Pour cela on considère la fonction $\Phi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) \, dx, \text{ avec } f(x, t) = \frac{\exp(-tx^2)}{1 + x^2}.$$

🌀 Nous établissons d'abord (**Question 1**) l'existence de I et de $\Phi(t)$ et nous montrons que $\Phi(t)$ est uniformément borné pour $t \geq 0$. Le théorème de "*dérivation des fonctions définies par intégrales*" nous permet (**Question 2**) de calculer

$$\Phi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

en fonction de $\Phi(t)$ et de I : autrement dit, Φ est solution d'une équation différentielle. La résolution de cette équation permet d'exprimer $\Phi(t)$ en fonction d'une primitive de $x \mapsto \exp(-x^2)$, puis d'en déduire (**Question 3**) la valeur de I .