Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

MATHEMATIQUES 01

Corrigé de la deuxième session – juin 2014

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On considère deux ensembles A et B. Rappeler la définition de $A \cap B$ et $A \cup B$, et montrer que :

$$A \cap B \subset A \cup B.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ? (sur $0,5 + 0,5 + 1$)

Réponse : Les éléments de $A \cap B$ appartiennent à A et à B. Les éléments de $A \cup B$ appartiennent à A ou à B, il y a donc parmi eux les éléments de $A \cap B$, ce qui fait que $A \cap B$ est inclus dans $A \cup B$.

EXERCICE 2

Soit g la fonction réelle définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

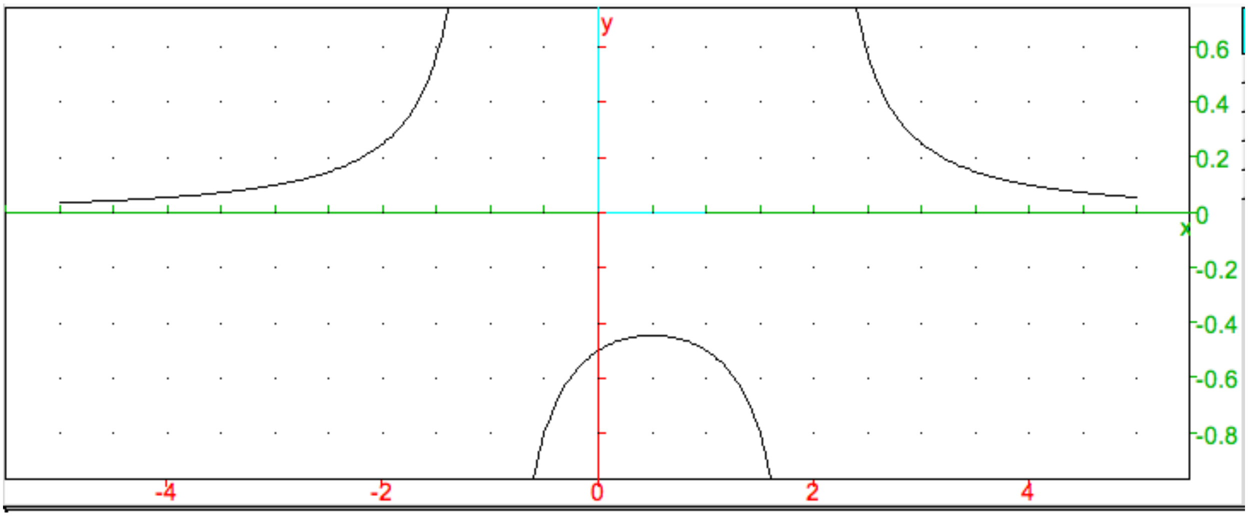
1. Donner le domaine de définition D_g de g. (sur 1)

   Réponse : On calcule les racines de $x^2 - x - 2$. Ce sont -1 et 2, donc g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

2. Etudier la fonction g (les limites, le tableau de variation et le graphe). (sur $0,5 + 1 + 0,5$)

   Réponse : Elle a pour limite 0 quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Elle a pour dérivée $g'(x) = -\dfrac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)^2}$.

x	-∞		−1		1/2		2		+∞
g′(x)		+	‖	+	0	–	‖	–	
g(x)	0	↗	+∞ ‖ -∞	↗	−4/9	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0



3. Déterminer l'ensemble image. Déterminer $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{-1/2\})$. (sur $0,5+0,5+0,5$)

   Réponse : L'ensemble image est $]-\infty,-4/9]\cup]0,+\infty[$. L'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ est visiblement vide, et $g^{-1}(\{-1/2\})=\{0,1\}$.

4. En déduire que la fonction $g : D_g \to \mathbb{R}$ n'est ni surjective ni injective. (sur $0,5+0,5$)

   Réponse : 1 a deux antécédents par g et 0 n'a pas d'antécédent.

5. Soit la fonction $h :]2,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ définie par $h(x)=g(x), \forall x\in]2,+\infty[$. Montrer que h est bijective, puis donner sa réciproque. (sur $0,5+1$)

   Réponse : C'est une bijection décroissante d'après le tableau de variations. Sa bijection réciproque est $g^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{y}}$.

Exercice 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-x^2$.

1. f est-elle injective ? Justifier (sur 1)

Réponse : Non, x et $-x$ ont même image par f.

2. f est-elle surjective ? Justifier (sur 1)

   Réponse : Non, les réels strictement plus grands que 1 n'ont pas d'antécédent par f.

3. Déterminer $f\big(f^{-1}([0,2])\big)$. (sur 1)

   Réponse : $f^{-1}([0,2])$ c'est $[-1,1]$. Donc $f\big(f^{-1}([0,2])\big) = f([-1,1]) = [0,1]$ (parce que les images de -1 et 1 sont 0, et l'image de 0 est 1).

4. Déterminer $f^{-1}\big(f([0,2])\big)$. (sur 1)

   Réponse : $f([0,2])$ c'est $[-3,1]$. Donc $f^{-1}\big(f([0,2])\big) = [-2,2]$.

Exercice 4

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \text{ (sur } 1+1)$$

   Réponse : C'est $\frac{\pi}{2}$ et 1, puisque les primitives sont respectivement $\arcsin(x)$ et $-\sqrt{1-x^2}$.

2. Calculer une primitive des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \frac{x\cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x\cos(x). \text{ (sur } 1+1)$$

   Réponse : $f_1(x)$ est de la forme $u'\cos(u)$, donc $F_1(x) = \sin(\sqrt{1+x^2})$. Par parties, $F_2(x) = x\sin(x) + \cos(x)$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+t^2)y'(t) - 2ty(t) = 1+t^2. \qquad (E)$$

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(1+t^2)y'(t) - 2ty(t) = 0. \text{ (sur 1)} \qquad (e)$$

   Réponse : $y(t) = C(1+t^2)$ d'après la formule.

2. Calculer la solution de l'équation homogène (e) qui vérifie $y(0) = 1$. (sur $0,5$)

   Réponse : $y(t) = 1+t^2$ (car $C = 1$).

3. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle (E) en appliquant la méthode de la variation de la constante. (sur $1,5$)

   Réponse : $y(t) = (1+t^2)\arctan(t)$.

4. En déduire la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(0) = 1$. (sur $0,5$)

   Réponse : $y(t) = (1+t^2)(1+\arctan(t))$ (car $C = 1$ dans la solution générale $y(t) = (1+t^2)\arctan(t) + C(1+t^2)$).

Exercice 6

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t \qquad (E)$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. (sur $1 + 1$)

   Réponse : $y(t) = e^t \cos(t)$ (avec les conditions initiales, la constante B de la solution générale $y(t) = e^t(A\cos(t) + B\sin(t))$ est nulle).
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $at + b$. (sur 1)

   Réponse : $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$.
3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. (sur 1)

   Réponse : $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t \cos(t)$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. (sur 1)

   Réponse : $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} - \frac{\sin(1) + 2\cos(1)}{2e} e^t \cos(t) - \frac{2\sin(1) - \cos(1)}{2e} e^t \sin(t)$.