**Université de Provence**
Licence de Mathématiques–Informatique
Année 2006–2007
Algèbre Linéaire 2
Examen Session 1
Durée 2 h
Sans document

---

**Exercice 1**
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$ et le factoriser.
2. Diagonaliser ou bien trianguler la matrice $A$.
3. Déterminer les fonctions $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} x' = x - 5y + 2z \\ y' = x + 7y - 2z \\ z' = 2x + 10y - 2z \end{cases}$$

et $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

**Exercice 2**
Soit $A$ une matrice $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'on peut toujours trouver une matrice $P$ inversible ($2 \times 2$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$) telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{C}$.

**Exercice 3**
Soient $q_1$ et $q_2$ deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$. On note $A$ la matrice de $q_1$ et $B$ la matrice de $q_2$. On suppose que $q_1$ et $q_2$ sont positives. Soit $q_3$ la forme quadratique de matrice $C$ définie par $C_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j}$.

1. Rappeler la définition d'une forme quadratique positive ainsi que d'une forme quadratique définie positive.

2. On suppose dans cette question seulement que $q_2$ est de rang 1.

   (a) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $B_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$ pour tous $i, j$.

   (b) En déduire que $q_3$ est une forme quadratique positive.

3. Montrer que $q_3$ est une forme quadratique positive.

4. En déduire que
$$\sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j} \geq 0.$$

5. Montrer que si $q_1$ est définie positive et $q_2$ non identiquement nulle, alors
$$\sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j} > 0.$$

**Exercice 4**

Soient $n \geq 1$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Session 1

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

1. et 2. $P_A(X) = (X-2)^3$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ se résoud en utilisant $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff PJP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$JP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sa dérivée est $\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix}$ et l'équation équivaut à $J\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + y_1 = x_1' \\ 2y_1 = y_1' \\ 2z_1 = z_1' \end{cases}$

on appelle $t$ la variable

d'où $z_1 = Ce^{2t}$, $y_1 = Be^{2t}$, $x_1' - 2x_1 = Be^{2t}$ et

On résoud la 3ème équation par variation de la constante d'où $x_1 = (A+Bt)e^{2t}$

Puis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ce qui fait $\begin{cases} x = (-A - Bt + 3B + 2C)e^{2t} \\ y = (A+Bt)e^{2t} \\ z = (2A + 2Bt + B + C)e^{2t} \end{cases}$

Exercice 2

Si les valeurs propres de $A$ sont distinctes, les vecteurs propres forment une base, et la matrice de l'application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ puisque $f(V_1) = \lambda_1 V_1$ et $f(V_2) = \lambda_2 V_2$.

Si les valeurs propres de $A$ sont confondues et s'il n'existe pas deux vecteurs propres linéairement indépendant, alors il n'en existe qu'un ($V \neq 0$ tel que $f(V) = \lambda V$), et on le complète en une base $\{V, W\}$ de $\mathbb{R}^2$

$\exists\ a, b$ $f(W) = aV + bW$ ; la matrice de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $b = \lambda$ (parce que le polynôme caractéristique est $(X-\lambda)(X-b)$ et on a supposé qu'il n'a qu'une seule racine). La matrice dans la base $\{V, \frac{1}{a}W\}$ est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. La forme quadratique sur $E$ est positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ ; elle est définie positive si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$

2. (a) Si $q_2$ est de rang 1, les colonnes de la matrice $B$ sont colinéaires à un seul vecteur qu'on appelle $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. C'est à dire

$B$ est de la forme $(*)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1 & \lambda_2\alpha_1 & \dots & \lambda_n\alpha_1 \\ \lambda_1\alpha_2 & \lambda_2\alpha_2 & & \lambda_n\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\alpha_n & \lambda_2\alpha_n & & \lambda_n\alpha_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Comme on peut choisir $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ à une constante près, c'est à dire on peut choisir $c\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ à la place de $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, on peut donc supposer que $\alpha_1 = \sqrt{B_{11}}$ ; alors on a $B_{11} = \lambda_1\alpha_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{B_{11}}{\alpha_1} = \sqrt{B_{11}} = \alpha_1$

La 1ère colonne de $B$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_n \end{pmatrix}$.

Comme $B$ est symétrique, sa 1ère ligne est $(\alpha_1^2 \ \alpha_1\alpha_2 \ \dots \ \alpha_1\alpha_n)$.
En comparant avec $(*)$ on trouve $\lambda_2 = \alpha_2, \dots, \lambda_n = \alpha_n$

et finalement les coefficients de $B$ sont les $\alpha_i\alpha_j$

(b) $q_3(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n)\, C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} C_{i,j}\, x_i x_j$

et comme $C_{i,j} = A_{i,j} B_{i,j} = A_{i,j}\, \alpha_i \alpha_j$

on a $q_3(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} A_{i,j}\, (\alpha_i x_i)(\alpha_j x_j)$

$$= (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)\, A \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix}.$$

C'est positif parce que la forme quadratique ($q_1$ définie par $A$) est supposée positive.

3. Se ramène à la question précédente, sachant que toute forme quadratique est une somme de carrés donc une ~~somme~~ de formes quadratiques de rang 1.

4. et 5. La somme $\sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$ représente $(1 \dots 1)\, C \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 $\det(\alpha_1(e_2 + \dots + e_n), \alpha_2 e_1 + \alpha_2(e_2 + \dots + e_n), \dots, \alpha_n(e_1 + \dots + e_{n-1})) = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$