Université de Provence
Licence de Mathématiques–Informatique
Année 2007–2008
Algèbre Linéaire 2
Session 2
Durée 2 h
Sans document

Il sera tenu compte dans la notation de la présentation ainsi que de la rédaction.

Exercice 1
Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients réels telle que $A^2 = -I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que l'entier n est pair.

2. Montrer que A n'admet pas de valeurs propres réelles.

3. En déduire qu'il n'existe aucune matrice 3×3 à coefficients réels telle que $A^2 = -I$.

4. Trouver une matrice 2×2 à coefficients réels telle que $A^2 = -I$.

Exercice 2
Soit E un K-espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie et u un endomorphisme de E. On considère le polynôme $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ et l'endomorphisme $Q(u) = u^2 - 5u + 6I$.

1. (a) Montrer que $u^2 - 5u + 6I = (u - 2I) \circ (u - 3I) = (u - 3I) \circ (u - 2I)$.
   (b) En déduire que $Q(u)$ est un isomorphisme de E si et seulement si les racines de Q ne sont pas valeurs propres de u.

2. Montrer que $\ker(u - 2I) \oplus \ker(u - 3I) \subset \ker Q(u)$.
   Note : Il faut montrer que la somme est directe et l'inclusion.

3. Soit λ une valeur propre de u.

Session 2

<u>Exercice 1</u> on suppose $A^2 = -I$

1. Le polynôme X^2+1 est donc annulateur de A, c'est à dire $A^2+I=0$. Les valeurs propres de A sont racines de X^2+1, ce sont donc i et $-i$.
Le polynôme caractéristique est $P_A(X) = (X+i)^\alpha (X-i)^\alpha$ (l'exposant α est le même parce que les valeurs propres i et $-i$ sont des nombres complexes conjugués).
Donc $n = \alpha + \alpha = 2\alpha$ est un nombre pair.
2. Les valeurs propres i et $-i$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$
3. Il n'existe pas de matrice 3×3 telle que $A^2 = -I$, parce que d'après 1. n est pair, tandis que 3 est impair.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = -I$.

<u>Exercice 2</u> on pose $Q(u) = u^2 - 5u + 6I$

1. (a) on calcule $(u-2I)\circ(u-3I) = u^2 - u\circ(3I) - (2I)\circ u + 6\, I\circ I$
$= u^2 - 5u + 6I$ (compte tenu que u est linéaire)
et de même pour $(u-3I)\circ(u-2I)$

(b) Supposons que $Q(u)$ est un isomorphisme
Si 2 était valeur propre de u, il existerait $V \neq 0$ tel que $u(V) = 2V$
$\Rightarrow (u-2I)(V) = 0$
$(u-3I)\circ(u-2I)(V) = 0$
$(Q(u))(V) = 0$ (avec $V \neq 0$) $\Rightarrow \operatorname{Ker}(Q(u)) \neq \{0\}$,
et ça contredit l'hypothèse que $Q(u)$ est un isomorphisme
($\operatorname{Ker} Q(u) = \{0\}$)

donc en fait 2 n'est pas valeur propre de u
De même pour 3.

Réciproquement supposons que 2 et 3 ne sont pas valeurs propres de u, et déterminons $\operatorname{Ker}(Q(u))$
= ensemble des vecteurs V tels que $(Q(u))(V) = 0 \Leftrightarrow$
$(u-2I)((u-3I)(V)) = 0$; alors $(u-3I)(V) = 0$ (sinon il serait vecteur propre de u, c'est à dire ce serait un vecteur W tel que $(u-2I)(W) = 0$). De même $(u-3I)(V) = 0 \Rightarrow V = 0$
d'où $\operatorname{Ker}(Q(u)) = 0$ avec u linéaire de E dans lui-même $\Rightarrow Q(u)$ isomorphisme

2. $\mathrm{Ker}(u-2I) \cap \mathrm{Ker}(u-3I) = \{0\}$, parce que si un vecteur V appartient à cette intersection il vérifie $u(V) = 2V$ et $u(V) = 3V$ donc $2V = 3V$ c'est à dire $V = 0$. D'où, la somme est directe

$\mathrm{Ker}(u-2I) \subset \mathrm{Ker}\, Q(u)$ parce que si $V \in \mathrm{Ker}(u-2I)$ alors $(Q(u))(V) = (u-3I)((u-2I)(V)) = (u-3I)(0) = 0$.

De même $\mathrm{Ker}(u-3I) \subset \mathrm{Ker}(Q(u))$, donc la somme de ces deux Ker est incluse dans $\mathrm{Ker}(Q(u))$.

3. (a) Si $u(V) = \lambda V$ (avec $V \neq 0$) alors

$$\begin{aligned}(u^2-5u+6I)(v) &= u(u(V)) - 5u(V) + 6V \\ &= u(\lambda V) - 5\lambda V + 6V \\ &= \lambda u(V) - 5\lambda V + 6V \\ &= \lambda^2 V - 5\lambda V + 6V \\ &= \underbrace{Q(\lambda)}_{\text{valeur propre}} \underbrace{V}_{\text{vecteur propre}}\end{aligned}$$

(b) Si u diagonalisable, on a trois vecteurs propres V_1, V_2, V_3 linéairement indépendants: $u(V_1) = \lambda_1 V_1$, $u(V_2) = \lambda_2 V_2$, $u(V_3) = \lambda_3 V_3$.

Par le calcul qui précède on déduit qu'ils sont vecteurs propres de $Q(u)$, donc $Q(u)$ est diagonalisable.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Valeurs propres 2 et 3, sous-espaces propres: $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ (si $a \neq 0$)

ou alors $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ (si $a = 0$)

et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ (quel que soit a)

2. u est diagonalisable s'il existe trois vecteurs propres linéairement indépendants. D'après la question précédente c'est vrai seulement dans le cas $a = 0$.

3. $Q(u)$ = endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

4. L'inclusion de la question 2. est une égalité à cause des dimensions:

$\dim\left(\mathrm{Ker}(u-2I) \oplus \mathrm{Ker}(u-3I)\right) = \dim(\mathrm{Ker}(u-2I)) + \dim(\mathrm{Ker}(u-3I)) = 1+1 = 2$ si $a \neq 0$ ou $2+1 = 3$ si $a = 0$.

(parce que la somme est directe)

D'autre part on calcule $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ si $a \neq 0$

ou $= \mathbb{R}^3$ si $a = 0$

D'où leurs dimensions sont égales et on a l'égalité des sous-espaces.

5. Par contre si $Q(x) = (x-2)^2(x-3)$, c'est le polynôme caractéristique $\Rightarrow$ on a $\mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Ker}(0) = 3 \neq 2$

alors $Q(u) = 0$, $\mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathbb{R}^3$ est différent de $\mathrm{Ker}(u-2I) \oplus \mathrm{Ker}(u-3I)$ si $a \neq 0$