Université de Provence — Licence de Mathématiques et Informatique

Première année

Deuxième session

Algèbre et Analyse Élémentaire

Durée: deux heures. Sans documents ni calculettes.

2007-2008 — 16 juin 2008

Exercice 1.

2 a) Déterminer une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

3 b) Montrer que l'application f, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, définie par

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{2}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$$

est une bijection (*indication: on pourra calculer d'abord $f(2k)$ et $f(2k+1)$*).

Exercice 2.

Soient E, F deux ensembles, $f{:}E \to F$ une application, $\mathcal{S}$ une relation dans F, et $\mathcal{R}$ la relation dans E définie par

$$x\mathcal{R}y \qquad \text{si} \qquad f(x)\mathcal{S}f(y).$$

1,5 a) Montrer que , si $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence, alors $\mathcal{R}$ l'est aussi.

1,5 b) Si $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre, quelle est la condition sur f pour que $\mathcal{R}$ soit, elle aussi, une relation d'ordre?

Exercice 3.

Soit E un ensemble non vide; $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est muni de la relation d'ordre "inclusion"; φ est une application croissante de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Remarque: φ n'est pas définie sur E mais sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, et vérifie $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathrm{E}),\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \varphi(\mathrm{A}) \subset \varphi(\mathrm{B})$.

a) Montrer que, pour tous A et B éléments de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$,

1 $\varphi(A) \cup \varphi(B) \subset \varphi(A \cup B)$.

2+1 b) Soit $S = \{A \mid A{\in}\mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \varphi(A){\subset}A\}$ et soit P l'intersection de tous les éléments de S. Montrer que P appartient à S, et que P est le plus petit élément de S.

1+2 c) Montrer que, si A appartient à S, $\varphi(A)$ aussi appartient à S. Compte tenu que $P \in S$, en déduire $\varphi(P) = P$.

Exercice 4.

On définit une loi de composition sur l'ensemble $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ en posant

$$(x, y) * (z, t) = (xz, xt + y).$$

2,5 a) Démontrer que $(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?

4,5 b) Soit (a, b) un élément de $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Préciser les valeurs de a et b pour lesquelles $(\{(1,0),(a,b)\}, *)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, *)$.

Algèbre et Analyse Élémentaires 2ème session juin 2008

Exercice 1 a) Injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$: $f(n) = n$ par exemple

b) Soit $f(n) = \frac{(-1)^n}{2}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$, est-elle bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$?

On calcule $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.

Il faut démontrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ a un antécédent unique par f.

1er cas : $n \geq 0$ a pour antécédent unique $2n$ puisque $f(2n) = n$ (et les autres $f(m)$ sont $\neq n$)

2ème cas : $n < 0 \Rightarrow n = -k-1$ avec $k \geq 0$
n a pour antécédent unique $2k+1$.

Elle est donc bien bijective.

Exercice 2 a) Si S est relation d'équivalence, la relation R définie par $x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)$ est aussi une relation d'équivalence parce que :

$x R x$ (c'est à dire $f(x) S f(x)$)

$x R y \Rightarrow y R x$ (c'est à dire $f(x) S f(y) \Rightarrow f(y) S f(x)$)

$x R z$ et $y R z \Rightarrow x R z$ (parce que $\left.\begin{cases} f(x) S f(y) \\ f(y) S f(z) \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) S f(z)$)

b) Pour que R soit relation d'ordre (en supposant que S l'est) il faut que f soit injective (ce qui fait que $x R y$ et $y R x \Rightarrow f(x) S f(y)$ et $f(y) S f(x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

Exercice 3 $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, et si $A \subset B$ alors $\varphi(A) \subset \varphi(B)$
(ce sont les deux seules hypothèses)

a) $\varphi(A) \cup \varphi(B)$ est-il inclus dans $\varphi(A \cup B)$?

oui puisque $\left.\begin{array}{lll} A \subset A \cup B & \Rightarrow & \varphi(A) \subset \varphi(A \cup B) \\ B \subset A \cup B & \Rightarrow & \varphi(B) \subset \varphi(A \cup B) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(A) \cup \varphi(B) \subset \varphi(A \cup B)$

b) Soit P l'intersection de tous les éléments de l'ensemble S, défini par $S = \{ A \mid A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \varphi(A) \subset A \}$.

1ère question : Appartient-il à S ? P est évidemment inclus dans tous les éléments A de S, on a donc d'après l'hypothèse 2, $\varphi(P) \subset \varphi(A)$, mais $\varphi(A) \subset A$, donc finalement $\varphi(P)$ est inclus dans tous les éléments A de S et par suite il est inclus dans leur intersection : $\varphi(P) \subset P = \bigcap \{\text{éléments de } S\}$

$\varphi(P) \subset P$ signifie bien que P appartient à S.

2ème : Il en est le plus petit élément puisqu'il est inclus dans chaque élément de S.

c) Soit $A \in S$, on a $\varphi(A) \subset A$ donc $\varphi(\varphi(A)) \subset \varphi(A)$ (d'après l'hypothèse 2) ce qui fait que $\boxed{\varphi(A) \in S}$ (réponse 1ère question)

On a vu que $P \in S$ c'est à dire $\varphi(P) \subset P$. Mais comme P est le plus petit élément de S, $\varphi(P)$ (qui appartient aussi à S) ne peut pas être strictement inclus dans P il lui est égal c'est à dire $\boxed{\varphi(P) = P}$. (réponse à la 2ème question)

Exercice 4 On pose $(x, y) * (z, t) = (xz, xt + y)$

a) $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est-il un groupe pour cette loi ?

- la loi est interne : $(x, y) * (z, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ parce que $xz \neq 0$ (si x et $z \in \mathbb{R}^*$)

- elle est associative : en calculant séparément $((x, y) * (z, t)) * (u, v)$ et $(x, y) * ((z, t) * (u, v))$, on obtient $(xzu, xzv + xt + y)$ dans les deux cas et elle est donc associative.

- elle admet pour élément neutre $(1, 0)$
$$\big((x, y) * (1, 0) = (1, 0) * (x, y) = (x, y)\big)$$

- chaque élément (x, y) admet pour symétrique $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ (car $x \neq 0$)
$$\left((x, y) * \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) * (x, y) = (1, 0)\right)$$

- Remarquons aussi que l'élément neutre et le symétrique appartiennent à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Donc $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est bien un groupe pour la loi $*$.

b) a et b fixés, $a \neq 0$, $\{(1,0), (a,b)\}$ est-il un sous groupe pour cette même loi ?

Il faut vérifier que la loi est interne, que l'élément neutre et le symétrique de tout élément de $\{(1,0), (a,b)\}$ appartiennent à $\{(1,0), (a,b)\}$.

- Loi interne : le seul problème est de vérifier que $(a, b) * (a, b) \in \{(1,0), (a,b)\}$

1er cas, Si $(a, b) * (a, b) = (1, 0)$ alors $(a^2, ab + b) = (1, 0) \Rightarrow a^2 = 1, (a+1)b = 0$ d'où $a = 1$ ou -1, avec $b = 0$ dans le cas $a = 1$, mais alors on tombe dans le

2ème cas : $(a, b) * (a, b) = (a, b)$ (vrai si $(a,b) = (1,0)$ puisque $(1,0) * (1,0) = (1,0)$) (faux si $(a,b) \neq (1,0)$)

On conclut que $\boxed{(a, b) = (1, 0) \text{ ou } (-1, b)}$ (avec $b \in \mathbb{R}$ quelconque).

(l'élément neutre et le symétrique ne posent pas de problème, $(1,0) \in \{(1,0), (a,b)\}$ et $(a,b)^{-1} = (a,b)$ (dans ces 2 cas) $\in \{(1,0), (a,b)\}$).