Examen Analyse 2 juin 2008 2ième session

Tout résultat cité doit être énoncé clairement, avec hypothèses et conclusion.

Ex. I

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) a) Quand est-ce qu'on dit que la suite f_n converge simplement à f ?

(1) b) Quand est-ce qu'on dit que la suite f_n converge uniformement à f ?

(2) a) Poser $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $h_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Montrer que h_n converge uniformement à la fonction $h(x) = x$.

(2) b) Est-ce que la suite ${h_n}^2$, où ${h_n}^2(x) = (h_n(x))^2$, converge uniformement sur $\mathbb{R}$?

(3) Supposer maintenant que les $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que la suite des f_n converge uniformement à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ poser $g_n(x) = f_n(x + \frac{1}{n})$.

Montrer que la suite g_n converge simplement a f.

Ex. II

1) Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \exp(-xn^3).$$

a) Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

c) Montrer que la fonction f est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

d) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Ex. III

0) Enoncer le théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier, sur le convergence (simple et uniforme), et énoncer l'égalité et inégalité de Bessel/Parseval.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique telle que $g(t) = |t^2|$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1) Calculer la série de Fourier (réelle) de g.

2) Utiliser ce calcul pour calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Corrigé Analyse 2 , juin 2008

Ex I

$A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

(1) a) f_n converge simplement vers f si, pour chaque x fixé, la suite des $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n \to +\infty$.

(1) b) Elle converge uniformément vers f si $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

(2) a) $h_n(x) = x + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers $h(x) = x$ puisque ce sup vaut dans ce cas $\frac{1}{n}$. (ici $x \in \mathbb{R}$)

(2) b) Par contre si on élève $h_n(x)$ au carré :

$$\left(h_n(x)\right)^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

le sup de la différence (entre h_m et h_n) vaut $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2x}{m} - \frac{1}{m^2} \right| = +\infty$

ce qui prouve (par le critère de Cauchy) que h_n^2 ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(3) Si f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément vers f, alors (pour x fixé) la suite des $g_n(x) = f_n\left(x + \frac{1}{n}\right)$ converge vers $f(x)$ parce que

$$\begin{aligned} |g_n(x) - f(x)| &= \left| f_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) + f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \left| f_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) \right| + \left| f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |f_n(y) - f(y)| + \left| f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

qui tend vers 0 d'après les deux hypothèses.

Ex II

1) La série $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \left(\sup_{x \in D} |f_n(x)| \right)$ converge

(où toutes les f_n sont définies sur le même domaine D).

Pour les questions suivantes, $f_n(x) = \exp(-x n^3)$.

a) $\sum f_n$ converge normalement (sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$) parce que $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \exp(-a n^3)$

$$\leq \exp(-a n)$$

et parce que la série (géométrique) $\sum \exp(-an) = \sum (\exp(-a))^n$ converge. ($\exp(-a)$ étant < 1).

b) Donc $\sum f_n(x)$ converge simplement pour tout $x \in [a, +\infty[$.
Mais comme ceci est valable pour tout $a > 0$, elle converge simplement pour tout $x \in]0, +\infty[$

c) La fonction $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a,+\infty[$ (d'après la convergence normale). Comme c'est vrai pour tout $a>0$, elle est continue sur $]0,+\infty[$.

Elle est décroissante par rapport à la variable x parce que les f_n le sont.

d) Compte tenu que $0<f_n(x)\leq \exp(-xn)=(\exp(-x))^n$, et que $f_0(x)=1$

$f(x)$ est compris entre 1 et la somme géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\exp(-x))^n = \frac{1}{1-\exp(-x)}$$ (qui tend vers 1 quand $x\to+\infty$)

Par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Ex III

0) Dirichlet : Si f est de classe C^1 par morceaux

(i.e, f dérivable sur des intervalles $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$, ... avec f' continue sur chacun de ces intervalles) et si elle est périodique alors sa série de Fourier (en exponentielle ou en cosinus-sinus) converge vers $\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t)+\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)\right)$.

La convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans un intervalle $]c,d[$ où f est continue.

Parseval : Si les c_n sont les coefficients de Fourier de f (avec $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$) avec f de période 2π et de carré intégrable, alors

$$\sum |c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}|f(x)|^2\,dx. \qquad (\forall a\in\mathbb{R})$$

1) La série de Fourier (réelle) de $g(t)=t^2$ $(t\in]-\pi,\pi[)$ est

$$g(t)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{n}\right)^2\cos(nx).$$ (les b_n sont nuls)

2) Donc $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\left(g(0)-\frac{\pi^2}{3}\right)=\boxed{-\frac{\pi^2}{12}}$$

et par Parseval (avec a_n et b_n), $a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2dt$

ce qui implique $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\boxed{\frac{\pi^4}{90}}.$$