Cours n° 10

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens (suite)

III Théorie de réduction des endomorphismes orthogonaux

1) Préliminaires

Lemme Soit $u \in O(E)$ et F un sev de E stable par u (ie $u(F) \subset F$) alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Remarque Si $u \in GL(E)$ et F est un sev de E tel que $u(F) \subset F$, on a par le théorème du rang

$$\dim F = \dim u(F) + \dim \mathrm{Ker}(u_{/F}).$$

Comme $\mathrm{Ker}\, u_{/F} = \mathrm{Ker}\, u \cap F = \{\vec{0}\} \cap F = \{\vec{0}\}$,

on a $\dim F = \dim u(F)$, qui donne avec $u(F) \subset F$ l'égalité $u(F) = F$.

Ainsi, pour $u \in GL(E)$ et F sev de E, on a

$$u(F) \subset F \iff u(F) = F.$$

Ceci est valable en particulier si $u \in O(E) \subset GL(E)$.

Dem du lemme : Soit $u \in O(E)$ et F un sev de E stable par u. A dem : $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$; soit $x' \in F$ tel que $x = u(x')$ (cf remarque). Alors

$$(u(y), x) = (u(y), u(x')) = \langle y, x' \rangle = 0 \text{ ; ok!}$$

$\mathbb{R}$

Détermination des éléments de $O(E)$ dans les cas $n=1$ et $n=2$

→ Si $\dim E = 1$, on a dans n'importe quelle bon de E, comme $O(1) = \{(\pm 1)\}$, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = (\pm 1)$ et $u = \pm \mathrm{Id}_E$.

→ Si $\dim E = 2$ et M est un élément de $O(2)$,

on a $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}$,

d'où $\begin{vmatrix} a & d \\ -c & b \end{vmatrix} = 0$ et l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ -c \end{pmatrix}$.

Comme $\det M = \pm 1 = \begin{vmatrix} a & -db \\ b & da \end{vmatrix} = d(a^2+b^2) = d$,

on a $d = \pm 1$.

<u>1er cas</u> $d = 1$; On a $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2 = 1$,

et $z = a+ib$ est de module 1 i.e. de la forme $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$),
d'où $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, qui est bien dans $O(2)$.

<u>2ème cas</u> $d = -1$, on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$; on vérifie que $M^2 = I_2$ et donc M est annulée par X^2-1 : c'est une matrice de symétrie. Or une matrice de symétrie de $O(n)$ est une matrice de symétrie $\perp$ (cf feuille d'exos exo 9). Donc M, qui est de déterminant -1, est une matrice de symétrie $\perp$ axiale.

Inversement, toute matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est bien dans $O(2)$.

2) <u>Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux</u>

<u>Théorème</u> : Soit $u \in O(E)$; il existe une bon $\mathcal{B}$ de E dans laquelle on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \overbrace{+1 \; \cdots \; +1}^{r} & & 0 \\ & \overbrace{-1 \; \cdots \; -1}^{s} & \\ 0 & & \overbrace{R_1 \; \cdots \; R_t}^{t} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } r \geq 0,\ s \geq 0,\ t \geq 0, \text{ et}$$

où $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$, avec $\theta_i \not\equiv 0 \mod \pi$.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur n.

→ $n = 1$ par le préliminaire, $O(1) = (\pm 1)$;

→ Supposons le résultat vrai en dimension $\leq n-1$, et soit E de dimension n.

<u>1er cas</u> : Si u admet une vp réelle λ, soit $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ, et $D = \mathrm{Vect}(\vec{x})$.

On a $u(D) = D$, d'où par le préliminaire $u(D^\perp) = D^\perp$, et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à D et à $D^\perp$.
Quitte à réordonner les vecteurs d'une base concaténée de $\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$ et une base de $D^\perp$ convenable, on obtient le résultat.

2ème cas : Si u n'admet pas de v.p réelle, le polynôme minimal de u est de la forme $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{\ell} P_i(X)^{t_i}$, où $t_i \geq 0$ et où $P_i(X) = (X - \alpha_i)(X - \bar{\alpha}_i) = X^2 - s_i X + p_i$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.
Écrivons $\Pi_u(X) = P_1(X) \times Q_1(X)$.
Comme $Q_1(X)$ est un diviseur strict de Π_u, on a $\ker Q_1(u) \neq E$; soit donc $\vec{x}' \in E \setminus \ker Q_1(u)$, et $\vec{x} = Q_1(u)(\vec{x}') \neq \vec{0}$.
On a $P_1(u)(\vec{x}) = P_1 Q_1(u)(\vec{x}') = \Pi_u(u)(\vec{x}') = \vec{0}$.
Ainsi $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\vec{x} \in \ker P_1(u)$.
Remarquons que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est libre, sinon $\vec{x}$ serait vecteur propre de u. De plus $F = \mathrm{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est stable par u car $u^2(\vec{x}) = s_1 u(\vec{x}) - p_1$.
Il suffit pour conclure d'appliquer l'hypothèse de récurrence à F et à $F^\perp$. ∎

Remarque : On a $\dim f = n = r + s + 2t$,
d'où $\det(u) = (-1)^s = (-1)^{n - r + 2t} = (-1)^{n-r}$.
Ainsi $\det(u) = (-1)^{n - \dim Fix(u)}$ où $Fix(u) = \{\vec{x} \in E \,;\, u(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

III Endomorphismes symétriques

Définition : Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit symétrique ou autoadjoint si $u = u^*$, c.à.d si
$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle.$$

Caractérisation matricielle : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une bon de E ; u est symétrique ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique, puisque $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = (mat_{\mathcal{B}}(u))^t$.

Notation : nous noterons $S(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients réels.

Prop : $S(n, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

dem : $A \in S(n, \mathbb{R})$ est déterminé par les $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients au dessus de sa diagonale principale. $\boxtimes$

V Théorie de réduction des endomorphismes symétriques

1) Lemme préliminaire

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u autoadjoint. Si F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Dem : Soit $\vec{y} \in F^\perp$ et $\vec{x} \in F$.

On a $\langle u(\vec{y}), \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, u(\vec{x}) \rangle = 0$. $\boxtimes$