L_3 2007 - 2008 Cours N° 1

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens (fin)

V Théorème de réduction des endomorphismes symétriques

1) Lemme préliminaire

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u autoadjoint.
Si F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

2) Théorème de réduction des endomorphismes auto adjoints

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique ou auto adjoint. Le polynôme caractéristique de u a toutes ses racines réelles, et il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Dem : 1) voir chapitre suivant (espaces hermitiens) : toutes les valeurs propres de u sont réelles. (chapitre suivant, fin du V).

2) Démonstration par récurrence sur $n = \dim E$ du fait qu'il existe une base de vecteurs propres de u. C'est clair si $n = 1$. Supposons le résultat vrai en dimension $\leq n-1$, et soit E de dimension n. Soit λ une valeur propre de u, et E_λ l'espace propre associé. Soit $F = E_\lambda^\perp$
→ Si $F = \{0\}$, u est une homothétie de rapport λ, et le résultat est immédiat.
→ Si $F \neq \{0\}$, par le lemme préliminaire, on peut appliquer à E_λ et à F l'hypothèse de récurrence, d'où le résultat. ■

Endomorphismes remarquables des espaces hermitiens.

I Rappels sur les espaces hermitiens

Définition : On appelle espace hermitien (ou préhilbertien de dimension finie) tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire hermitien, càd d'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que ① φ est une forme sesquilinéaire, ie pour tout $y_0 \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est linéaire, et pour tout $x_0 \in E$, $y \mapsto \varphi(x_0, y)$ est antilinéaire ($\varphi(x_0, y+y') = \varphi(x_0, y) + \varphi(x_0, y')$ et $\varphi(x_0, \lambda y) = \bar{\lambda}\, \varphi(x_0, y)$) ;

② φ est hermitienne, ie $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$;

③ φ est définie et positive.

Dans tout ce qui suit, E est un espace hermitien de dimension n.

⚠ des parties complètement analogues au cas euclidien ne seront pas détaillées.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, de Minkowski, norme hermitienne $\sqrt{x^2}$.

Notion d'orthogonalité ; si F est un sev de E, $E = F \oplus F^\perp$

Remarque : 1) Si (E, φ) est euclidien, on a $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle$, si bien que $x \perp y$ équivaut à $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$ (théorème de Pythagore et réciproque). 2) Si maintenant (E, φ) est hermitien,
$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y)$; ainsi $x \perp y$ entraîne
$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$, mais la réciproque du théorème de Pythagore est fausse (considérer $x \neq \vec{0}$, et x et ix).

Théorème E admet des bases orthonormées ("bon")

Matrice de Gram de φ : $Gr_{\mathcal{B}}(\varphi) = (e_i \cdot e_j)_{1\le i,j\le n}$, où $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Si $x=\sum x_i e_i$ et $y=\sum y_i e_i$, on a $\boxed{x\cdot y = {}^tX\; Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)\;\overline{Y}}$.

Si $\mathcal{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ est une autre base de E, on a $Gr_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\; Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)\;\overline{P}$.

Dualité : toute forme linéaire sur E est de la forme $x\mapsto \varphi(x,y_0)$ pour un vecteur y_0 fixé de E.

Adjoint d'un endomorphisme : pour $u\in\mathcal{L}(E)$, c'est l'unique élément u^* de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tous x, y de E on ait : $\langle u(x),y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$.

Donc $(u^*)^*=u$, $(\lambda u+\mu v)^* = \bar\lambda u^* + \bar\mu v^*$ et $(u\circ v)^* = v^*\circ u^*$.

Matrice de u^*, Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E ; on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = \overline{Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}\, Mat_{\mathcal{B}}(u)^t}\;\overline{Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)}.$$

En particulier, $\boxed{\text{si } \mathcal{B} \text{ est une b.o.n., on a } Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = \overline{Mat_{\mathcal{B}}(u)}^t}$.

II Endomorphismes unitaires, groupe unitaire

1) Endomorphismes unitaires

Définition Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit unitaire si

$$\forall x,y\in E,\quad \langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,y\rangle.$$

Caractérisations pour $u\in\mathcal{L}(E)$, sont équivalentes ⓪ u est unitaire ;

① $\forall x\in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$;

② il existe une b.o.n. de E transformée par u en une b.o.n. ;

③ l'image par u de toute b.o.n. est une b.o.n. ;

④ $u\in GL(E)$ et $u^{-1}=u^*$; ④bis $uu^*=Id_E$; ④ter $u^*u=Id_E$.

2) Matrices unitaires.

Définition Une matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si ses vecteurs colonnes forment une b.o.n. de $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien usuel $(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) = \sum x_i\overline{y_i}$.

Caractérisations $A\in M_n(\mathbb{C})$ étant donnée, sont équivalentes ;

① A est unitaire ; ② les vecteurs lignes de A forment une b.o.n. de $\mathbb{C}^n$;

③ $A\in GL_n(\mathbb{C})$ et $A^{-1} = \overline{A}^t$; ③bis $A\overline{A}^t = I_n$; ③ter $\overline{A}^tA = I_n$.

Notation : on note souvent $A^* = \overline{A}^t$. Propriété si A est unitaire, $|\det A|=1$.

3) Propriétés matricielles des endomorphismes unitaires

Soit u un endomorphisme unitaire et $\mathcal{B}$ une base de E.

L'égalité $u^*=u^{-1}$ se traduit par

$$Mat_{\mathcal{B}}(u)^{-1} = \overline{Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}\, Mat_{\mathcal{B}}(u)^t}\;\overline{Gr_{\mathcal{B}}(\varphi)}.$$

En particulier, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n., on a $Mat_{\mathcal{B}}(u)^{-1} = \overline{Mat_{\mathcal{B}}(u)}^t$, d'où :

Nouvelle caractérisation : $u\in\mathcal{L}(E)$ est unitaire ssi sa matrice dans une base orthonormée de E est unitaire.

4) Groupe unitaire

→ L'ensemble des endomorphismes unitaires de E forme un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ appelé groupe unitaire de E et noté $U(E)$.

→ L'ensemble des matrices unitaires de $M_n(\mathbb{C})$ forme un sous groupe de $(GL(n, \mathbb{C}), \times)$ noté $U(n)$.

Proposition Soit B une bon de E ; les groupes $U(E)$ et $U(n)$ sont isomorphes par $U(E) \to U(n)$ $u \mapsto Mat_B(u)$.

Sous groupes remarquables $SU(E) = \{u \in U(E) ; \det u = 1\}$, et $SU(n) = \{M \in U(n) ; \det M = 1\}$, qui sont isomorphes.

III Théorème de réduction des endomorphismes unitaires

Lemme Soit $u \in U(E)$ et F un sev de E stable par u ; alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème Soit $u \in U(E)$; l'endomorphisme u est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont des nombres complexes de module 1 et il existe une bon de vecteurs propres de u.

IV Endomorphismes hermitiens (ou autoadjoints).

Définition Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit hermitien, ou autoadjoint si $u = u^*$, c.a.d si : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Caractérisation Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une bon de E ; u est hermitien ssi sa matrice dans la base B est hermitienne i.e vérifie $Mat_B(u) = \overline{Mat_B(u)}^t$.

Proposition : L'ensemble $H(n, \mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ hermitiennes est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

V Théorème de réduction des endomorphismes hermitiens

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ hermitien, et F un sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ hermitien ; l'endomorphisme u est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont réelles et il existe une bon de vecteurs propres de u.

Démonstration du fait qu'un endomorphisme hermitien a toutes ses valeurs propres réelles et que ses sous espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux :

→ Si x est un vecteur propre associé à une v.p. λ, on a $\langle x, u(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$, $\langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x | x \rangle =$ d'où $\lambda = \bar{\lambda}$, puisque $\langle x, x \rangle > 0$.

→ Si x_1 est un vecteur propre associé à une vp λ_1 et x_2 à une vp λ_2, on a, où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\langle u(x_1), x_2 \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, u(x_2) \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$, d'où, puisque $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$, $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0$, soit $x_1 \perp x_2$.