Algèbre, groupes et géométrie.

[Référence Gourdon, les maths en tête, Ellipses]

Cours n° 3 Diagonalisation (suite)

Trigonalisation

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si P_u est scindé sur K et a toutes ses racines simples, alors u est diagonalisable.

dem : Si $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$, avec les $\lambda_i \neq 2$ à 2, qui sont les vp de u, désignons pour chaque i par x_i un vecteur propre associé à λ_i. Comme les E_{λ_i} sont en somme directe, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres : ça fait. ■

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in K$ une racine de P_u de multiplicité α. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

dem : Le ss espace propre E_λ est stable par u. Soit $v = u/_{E_\lambda} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$. On a vu que $P_v(X) | P_u(X)$. Comme $v = \lambda \, Id_{E_\lambda}$, on a donc $P_v(X) = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda}$,

et donc $\dim E_\lambda \leq \alpha$. ■

Théorème Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1) u est diagonalisable ;

2) P_u est scindé sur K et les racines λ_i de P_u sont toutes de multiplicité $\alpha_i = \dim E_{\lambda_i}$;

3) il existe des vp $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de u vérifiant
$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

dem : $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de u. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme (quitte à réordonner les vecteurs de base) :

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{\alpha_1 \text{ occ.}} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_p \ldots \lambda_p}_{\alpha_p \text{ occ.}} \end{pmatrix}$$

, de sorte que $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, et α_i est la multiplicité de λ_i dans P_u. Pour tout i, il existe α_i vecteurs propres associés à λ_i dans la base $\mathcal{B}$, si bien que $\dim E_{\lambda_i} \geq \alpha_i$, d'où, par la proposition précédente, $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Posons $P_u = (-1)^n \prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, avec les $\lambda_i \neq 2$ à 2. Soit $F = \bigoplus E_{\lambda_i}$. On a $\dim F = \sum \dim E_{\lambda_i} = \sum \alpha_i = n$, si bien que $E = F$: OK.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Si $\mathcal{B}_i$ est une base de E_{λ_i}, il est clair que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1 \ldots \mathcal{B}_m)$ est une base de vecteurs propres de u. ■

<u>Proposition</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sev de E stable par u. Alors $v = u_{/F} \in \mathcal{L}(F)$ et v est diagonalisable.

⚠ démonstration possible que plus loin !

IV Endomorphismes trigonalisables

Définition 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. 2) Soit $A \in M_n(K)$, A est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque L'élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque de E est trigonalisable.

Théorème Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; alors u est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique P_u est scindé sur K.

dem CN Si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, soit à $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$,

on a $P_A(X) = P_T(X) = (-1)^n \prod (X - \alpha_i)$,

et P_A est scindé sur K.

CS Par récurrence sur n.
- Pour $n = 1$ c'est immédiat.
- On suppose le résultat vrai en dimension $n-1$. On note $u \in \mathcal{L}(K^n)$ tel que $A = \underset{\mathcal{B}_{can}}{\mathrm{Mat}}(u)$.

Comme P_A est scindé sur K, A admet au moins une valeur propre α, et u admet au moins un vecteur propre e_1 associé à la vp α. Complétons e_1 en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de K^n. On a $\underset{\mathcal{B}_1}{\mathrm{Mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & X \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$

avec $M \in M_{n-1}(K)$. Par l'hyp de récurrence M est trigonalisable, car l'égalité $P_A(X) = (\alpha - X) P_M(X)$

montre que P_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit donc $P \in GL_{n-1}(K)$ tq $T = P^{-1} M P$ soit triangulaire supérieure.

Alors

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)^{-1} \cdot \underset{B_1}{Mat}(u) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \times \\ \hline 0 & P^{-1} M P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \times \\ \hline 0 & T \end{array}\right), \text{ qui est}$$

triangulaire supérieure et semblable à $A = \underset{B_{can}}{Mat}(u)$.

cqfd !

Remarque : Si K est algébriquement clos, typiquement pour $K = \mathbb{C}$, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable (pas le cas sur $\mathbb{R}$!!!).

Proposition : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable et F est un sev de E stable par u, alors $u_{/F}$ est trigonalisable.

dem : On a vu que $P_{u_{/F}} \mid P_u$, et donc P_u ~~scindé~~ scindé entraîne $P_{u_{/F}}$ scindé.

V Réductions simultanées

Proposition Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$.
Alors 1) Tout ss-ev propre de u est stable par v ;
$\ker u$ est stable par v.
2) $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

dém 1) Soit λ vp de u et $x \in E_\lambda(u)$.
On a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$,
qui montre que $v(x) \in E_\lambda(u)$.
Si $\ker u = \{0\}$, il est stable par v ; sinon
c'est un ssev propre de u.

2) Si $y = u(x)$, alors $v(y) = v(u(x))$
$= u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$, et
$\operatorname{Im} u$ est stable par v. ∎

Théorème de diagonalisation simultanée
Si u et v $(\in \mathcal{L}(E))$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales.

dém : pas le temps...

Théorème de trigonalisation simultanée

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ <u>et</u> $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires supérieures.

dem : pas le temps...
(récurrence sur la dimension).