Algèbre, groupes et géométrie

Cours n°5 : Polynômes d'endomorphismes (suite) :
le théorème de Cayley Hamilton.
Réduction des endomorphismes : endomorphismes nilpotents, sous espaces caractéristiques

Polynômes d'endomorphismes (suite) : le théorème de Cayley Hamilton

III) Le théorème de Cayley Hamilton

Nous utiliserons dans ce qui suit les matrices compagnons vues dans la feuille 4 exo 1 :

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1} + X^p$ est un polynôme unitaire de $K[X]$, il existe une matrice de $M_p(K)$ dont le polynôme caractéristique est au signe près le polynôme $P(X)$.

C'est la matrice :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline 1 & & & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -a_{p-1} \end{array}\right)$$

, appelée matrice compagnon du polynôme P.

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et P_u son polynôme caractéristique.

On a $P_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>Dem</u> : Soit $x \in E \setminus \{\vec{0}_E\}$. Il existe un plus petit entier $p>0$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée. Comme la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, c'est que le vecteur $u^p(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent, et il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in K$ tels que $u^p(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x)$,

ou encore, en posant $a_i = -\alpha_i$,

$$u^p(x) + a_{p-1} u^{p-1}(x) + \dots + a_1 u(x) + a_0 = \vec{0}_E .$$

Posons $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1} + X^p \ (\in K[X])$;

nous venons d'écrire l'égalité $(P(u))(x) = \vec{0}_E$.

Complétons $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$, libre, en une base $\mathcal{B}$ de E. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$, et A est la matrice compagnon de P.

Remarquons que $P_u(X) = P_A(X)\, P_C(X)$.

On a donc $[P_u(u)](x) = [P_C(u)]\,\underbrace{[P_A(u)(x)]}_{[(-1)^p P(u)](x) = \vec{0}_E} = \vec{0}_E$.

Comme x est quelconque, on en déduit que $P_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>Corollaire</u>. Avec les notations précédentes, on a $\pi_u \mid P_u$.

Réduction des endomorphismes : endomorphismes nilpotents, sous-espaces caractéristique

E désigne un K e.v de dimension $n \geq 1$ sur le corps commutatif K.

I Endomorphismes nilpotents

Définition : 1) Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.
2) L'indice de nilpotence de u est alors l'entier naturel $\inf \{ p \in \mathbb{N}^* ; u^p = 0 \}$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $P_u(X) = (-1)^n X^n$ (où $n = \dim E$).

Démonstration : Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u admet le polynôme X^p comme polynôme annulateur. On en déduit que le polynôme minimal de u est de la forme X^q (et on sait en passant que q est l'indice de nilpotence de u). Ainsi la seule valeur propre de u est 0.

Donc le polynôme caractéristique de u est de la forme $(-1)^m X^m Q(X)$ où $Q(X)$ n'est pas scindé sur K.

Mais en considérant la matrice A de u dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(K) \subset M_n(\tilde{K})$, où $\tilde{K}$ est une clôture algébrique de K. Alors A représente un endomorphisme nilpotent $\tilde{u}$ de $\tilde{K}^n$, auquel on peut appliquer le raisonnement précédent, puis que $Q(X) = 1$, ce qui montre que $m = n$ et $P_{\tilde{u}}(X) = P_A(X) = P_u(X)$. ∎

II Sous espaces caractéristiques

Attention, dans tout ce § les polynômes caractéristiques des endomorphismes considérés seront supposés scindés sur K.

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_u, son polynôme caractéristique, soit scindé sur K :

$$P_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (X-\lambda_r)^{\alpha_r},$$

où les λ_i sont $\neq$ 2 à 2.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, le sev de K
$N_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ s'appelle le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

Proposition Avec les notations précédentes, on a

1) le sev N_i est stable par u,

2) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$;

3) $\dim N_i = \alpha_i$.

Démonstration 1) Si $x \in N_i$, $(u-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}(u(x)) = u \circ (u-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}(x) = 0$.

2) Par le théorème de décomposition des noyaux, on a $\ker P_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u-\lambda_i)^{\alpha_i}$, et comme $P_u(u)=0$ (par le théorème de Cayley-Hamilton), on a $\ker P_u(u) = E$.

3) Comme N_i est stable par u, on peut considérer la restriction u_i de u à N_i. Cette restriction vérifie, puisque $N_i = \ker(u-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$, l'égalité $(u_i - \lambda_i Id_{N_i})^{\alpha_i} = 0$. Donc $u_i - \lambda_i Id_{N_i}$

est nilpotente, et son polynôme caractéristique est $(-X)^{\dim \Pi_i}$; donc le polynôme caractéristique de $u_i = (u_i - \lambda_i Id_{\Pi_i}) + \lambda_i Id_{\Pi_i}$ est $(\lambda_i - X)^{\dim \Pi_i}$.

Or $P_{u_i} \mid P_u$; donc $\dim \Pi_i \leq \alpha_i$.

Comme de plus $n = \sum \dim \Pi_i$ (par 2)) et $n = \sum \alpha_i$, on en déduit $\dim \Pi_i = \alpha_i$ pour tout i. ∎

<u>Définition-Prop</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique entier naturel r tel que

$\{0\} \subset \ker u^0 \underset{\neq}{\subset} \ker u \underset{\neq}{\subset} \dots \subset \ker u^r = \ker u^{r+1} = \ker u^{r+2} = \dots$.

L'entier r s'appelle l'indice de u. C'est aussi le plus petit entier naturel r tel que $\ker u^r = \ker u^{r+1}$.

<u>Dem</u> → Remarquons tout d'abord qu'on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\ker u^p \subset \ker u^{p+1}$.

On en déduit $\dim \ker u^p \leq \dim \ker u^{p+1}$.

Autrement dit, la suite $(v_p)_p = (\dim \ker u^p)_p$ est une suite croissante d'entiers naturels $\leq n$.

Il existe donc un entier r défini par $r = \inf \{p \in \mathbb{N} ; v_p = v_{p+1}\}$. On a alors

→ • pour $p < r$, $\ker u^p \underset{\neq}{\subset} \ker u^{p+1}$ car $\dim \ker u^p < \dim \ker u^{p+1}$;

• pour $p = r$, $\ker u^r = \ker u^{r+1}$ car $\ker u^r \subset \ker u^{r+1}$ et $\dim \ker u^r = \dim \ker u^{r+1}$;

• pour $p > r$,
$x \in \ker u^{p+1} \Leftrightarrow u^{r+1}(u^{p-r}(x)) = 0$
$\Leftrightarrow u^{p-r}(x) \in \ker u^{r+1} = \ker u^r \Leftrightarrow x \in \ker u^p$,
ie $\ker u^p = \ker u^{p+1}$.
∎

→ L'unicité est évidente.