Algèbre, groupes et géométrie

Cours n° 6

Sous espaces caractéristiques (fin).
Réduction des endomorphismes : Th de Jordan

→ Sous espaces caractéristiques (suite)

<u>Théorème</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_u soit scindé sur K :
$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$

Alors ① Le polynôme minimal Π_u de u est de la forme
$$\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}, \text{ avec, pour } i = 1, \dots, r,$$
$1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

② L'ordre de multiplicité β_i de λ_i dans Π_u est égal à l'indice de $(u - \lambda_i Id_E)$.

<u>Démonstration</u> ① C'est immédiat, car $\Pi_u \mid P_u$ et les racines de Π_u, comme de P_u, sont les vp de u.

② Posons $Q(X) = \prod_{i=2}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, autrement dit
$$\Pi_u(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} Q(X).$$
Par le lemme des noyaux, on a
$$\ker \Pi_u(u) = E = \ker (u - \lambda_1 Id)^{\beta_1} \oplus \underbrace{\ker Q(u)}_{=:M}.$$

Alors $(*)$ $\dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^{\beta_1} + \dim M = n$.

Posons maintenant $P(X) = (X - \lambda_1)^q \cdot Q(X)$, pour un entier q quelconque de $\mathbb{N}^*$.

Par le lemme des noyaux on a cette fois
$$\ker P(u) = \ker (u - \lambda_1 Id_E)^q \oplus M,$$
d'où $(**)$ $\dim \ker P(u) = \dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^q + \dim M$.

→ Si $q \geq \beta_1$, on a $\Pi_u \mid P$, d'où $P(u) = 0$,

et (*) et (**) donnent

$\dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^q = \dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^{\beta_1}$,

d'où $\ker (u - \lambda_1 Id_E)^q = \ker (u - \lambda_1 Id_E)^{\beta_1}$.

→ Si $q < \beta_1$, on a $\Pi_u \nmid P$ donc $\ker P(u) \neq E$,

d'où, par (*) et (**),

$\dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^q < \dim \ker (u - \lambda_1 Id_E)^{\beta_1}$.

On a donc bien que β_1 est l'indice de $u - \lambda_1 Id_E$. ∎

<u>Remarques</u> 1) Ainsi $N_i = \ker (u - \lambda_i Id_E)^{\beta_i} = \dots$

$= \ker (u - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i} = \dots$,

où $\Pi_u = \prod (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ et $P_u = \prod (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$.

2) Ceci permet de calculer le polynôme minimal :

on calcule $P_u(u)$, puis pour tout i

l'indice de $(u - \lambda_i Id_E)$. (peut être laborieux !!!..)

[Ref de las Ferand (Fraudies?) tome I als Dunod : Jordan avant Dunford]

Réduction des endomorphismes : réduction de Jordan

Ici $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif algébriquement clos et E un $\mathbb{K}$ e v de dimension finie $n \geq 1$.

I Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p, autrement dit $\pi_u(X) = X^p$, avec $p \geq 1$.

→ $\boxed{1^{er} \text{ cas } p = n}$

On a $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Il existe donc $e \in E$ tel que $u^{n-1}(e) \neq \vec{0}_E$. On définit alors la suite $e_1 = u^{n-1}(e)$, $e_2 = u^{n-2}(e)$, ..., $e_{n-1} = u(e)$, et on pose $e = e_n$.

Les vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ sont indépendants, car si on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \vec{0}_E$, alors en appliquant u^k pour $k = n-1, \dots, 1$, il vient $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-1}(e_i) = \vec{0}_E$ $= \alpha_n e_n$, d'où $\alpha_n = 1$.

En faisant $k = n-1, \dots, k = 1$ on obtient ainsi :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = 0.$$

On a donc une base $\mathcal{B} = (e_i)$ de E telle que $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $i > 1$, et $u(e_1) = \vec{0}_E$.

Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} =: A_n$.

→ D/ 2^{e} cas p quelconque tel que $1 \leq p \leq n$

<u>Démonstration abrégée</u> : On montre qu'on peut décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u $E = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$,

avec $u/_{M_i}$ nilpotent d'indice de nilpotence $p_i = \dim M_i$, et $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$.

De plus, la donnée de u détermine de façon unique la suite ↗ des dimensions des M_i.

On en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe une unique suite ↗ d'entiers $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$ telle qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{p_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{p_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{p_s}} \end{pmatrix},$$

où $A_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_i}(K)$.

<u>Définition</u> La matrice A est appelée matrice réduite de Jordan de u.

<u>Remarques</u> 1) Si $p_i = 1$, $A_{p_i} = (0)$.

2) $u/_{M_i}$ étant nilpotent d'indice $p_i = \dim M_i$, le polynôme minimal de $u/_{M_i}$ est X^{p_i} ; son

polynôme caractéristique est $(-X)^{p_i}$.

3) Le polynôme minimal de u est X^{p_s} ; son polynôme caractéristique est $(-X)^n$.

4) Deux matrices nilpotentes sont semblables ssi la suite des p_i du théorème est la même pour les 2 matrices.

<u>Définition</u> Les polynômes minimaux $X^{p_1}, \dots, X^{p_s}$ sont appelés facteurs invariants de l'endomorphisme nilpotent u.

<u>Corollaire</u> : Deux matrices nilpotentes sont semblables ssi elles ont mêmes facteurs invariants.

II Réduction de Jordan d'un endomorphisme quelconque

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, de polynôme minimal $\Pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\beta_i}$, et de polynôme caractéristique $P_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

$\boxed{1^{er} \text{ cas } r=1}$: u n'admet qu'une seule valeur propre λ_1 notée λ, on pose également $\beta_1 = \beta$ et $\alpha_1 = \alpha$.

Remarquons que $u = \lambda Id_E + (u - \lambda Id_E)$.

Dans cette écriture, $u - \lambda Id_E$ est nilpotent d'indice β et λId_E est une homothétie.

Il existe par I une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de $u - \lambda Id_E$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{p_s} \end{pmatrix}, \text{ où } A_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_i}(K).$$

La matrice de u dans cette base est donc

$$B = \begin{pmatrix} B_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{p_s} \end{pmatrix}, \text{ où } B_{p_i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_i}(K).$$

Exemple ...

→ $\boxed{\text{Deuxième cas : } \chi \text{ quelconque}}$

On se ramène au premier cas en décomposant en somme directe des sous-espaces

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

caractéristiques de u. Les restrictions $u_{/N_i}$ relèvent du premier cas.

On peut alors aboutir au théorème de réduction de Jordan :

Théorème [voir énoncé au début du cours !]

...